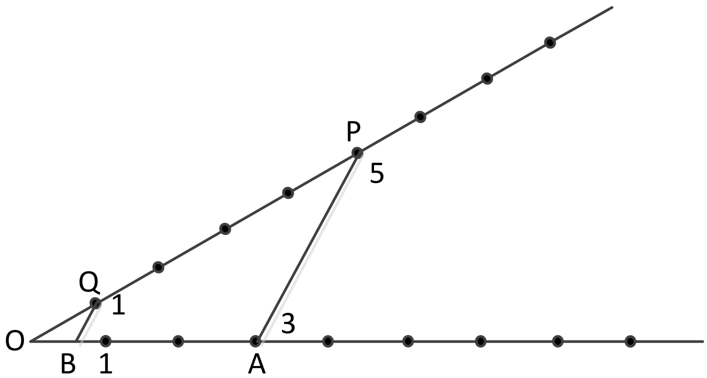
(68)數、數線和幾何

我們都看過數線，下圖就是一個數線的示意圖，圖中我們忽略了負數的部分。

如果我們要找5在數線上的位置，這是很容易的，但假設我們要找$\frac{3}{5}$在數線上的位置，就很困難了。在下面，我們告訴同學如何利用幾何來確定$\frac{3}{5}$在數線上的位置。

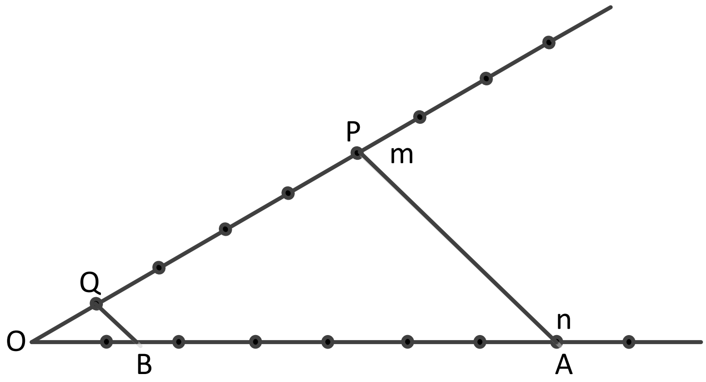
請看下圖:



在上圖中，我們畫了兩條數線。$\overline{\mathrm{OP}}=5$、$\overline{\mathrm{OA}}=3$、$\overline{\mathrm{OQ}}=1$，$\overline{QB}\parallel\overline{PA}$，同學們可以很容易地證明$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{1}{5}$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{5}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{3}{5}$$

假設一個分數是$\frac{n}{m}$，我們就做兩條數線如下圖:



上圖中，$\overline{\mathrm{OP}}=\mathrm{m}$、$\overline{\mathrm{OA}}=\mathrm{n}$、$\overline{\mathrm{OQ}}=1$，$\overline{QB} \parallel \overline{PA}$，可證:

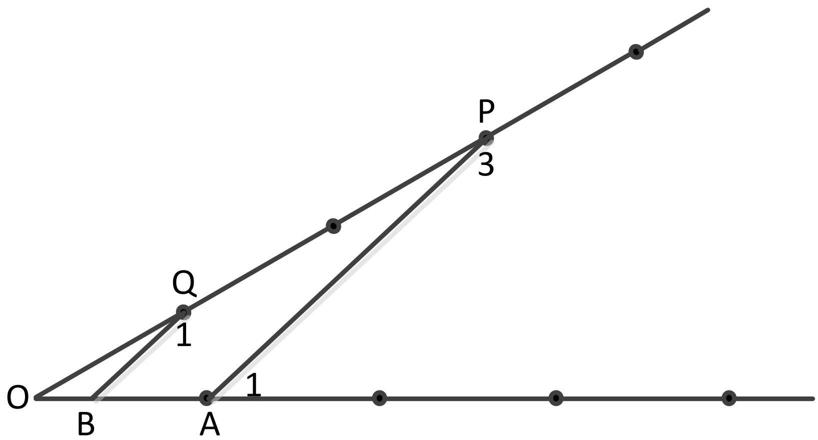
$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{\mathrm{m}}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$$

以下是一些例子:

（1）$x=\frac{1}{3}$

此時 m=3，n=1，請看下圖:



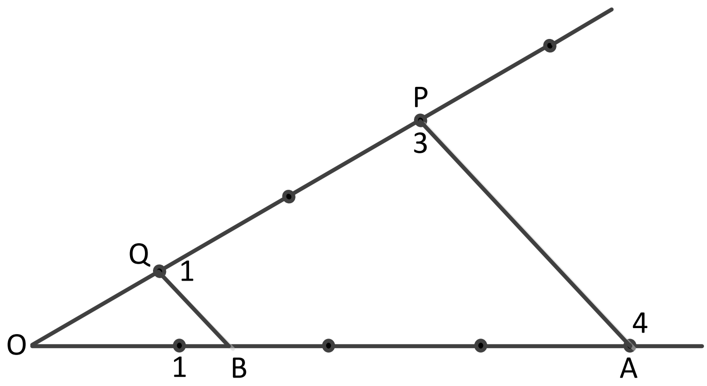
$\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}$$

(2) $x=\frac{4}{3}$

m=3，n=1，請看下圖:



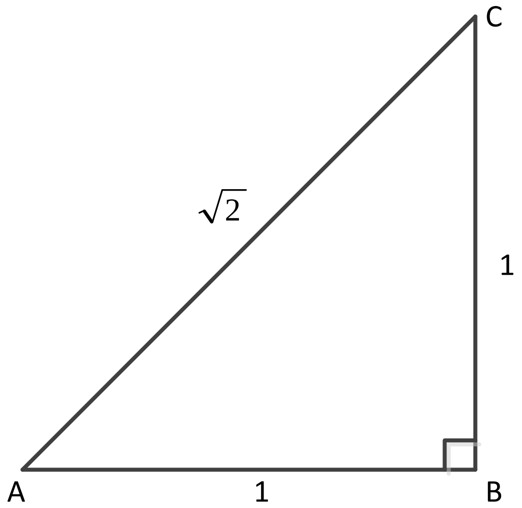
$\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$

$$\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{4}{3}$$

我們可以說，以上的討論是在找一個有理數的大小，在下面，我們要找一些無理數，設法找出它們的大小，也因此可以確定它們在數線上的位置。

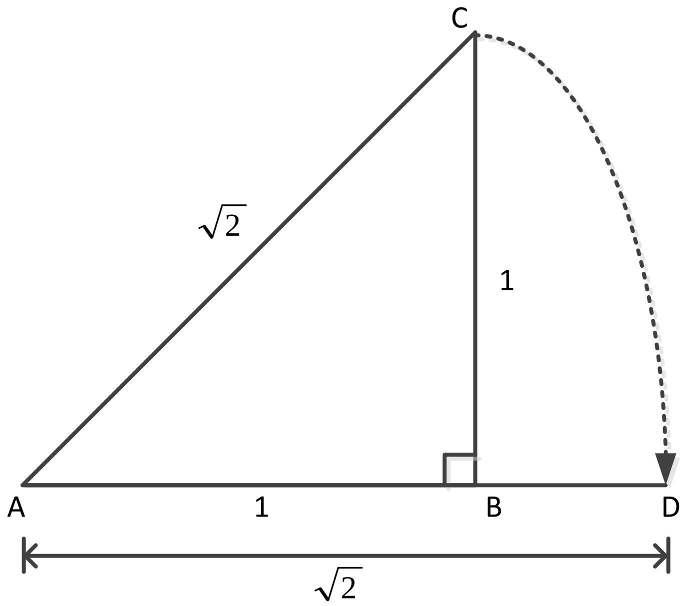
我們先求$\sqrt{2}$的大小，請看下圖：



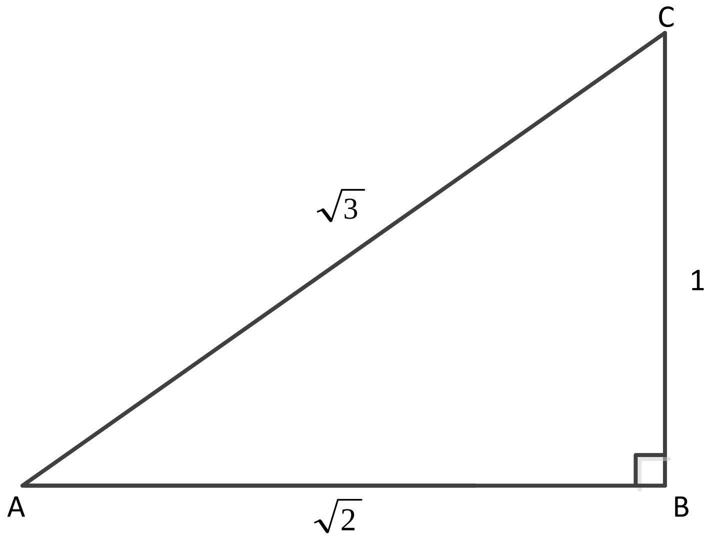
在上圖的直角三角形中，$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = 1 + 1 = 2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2}$

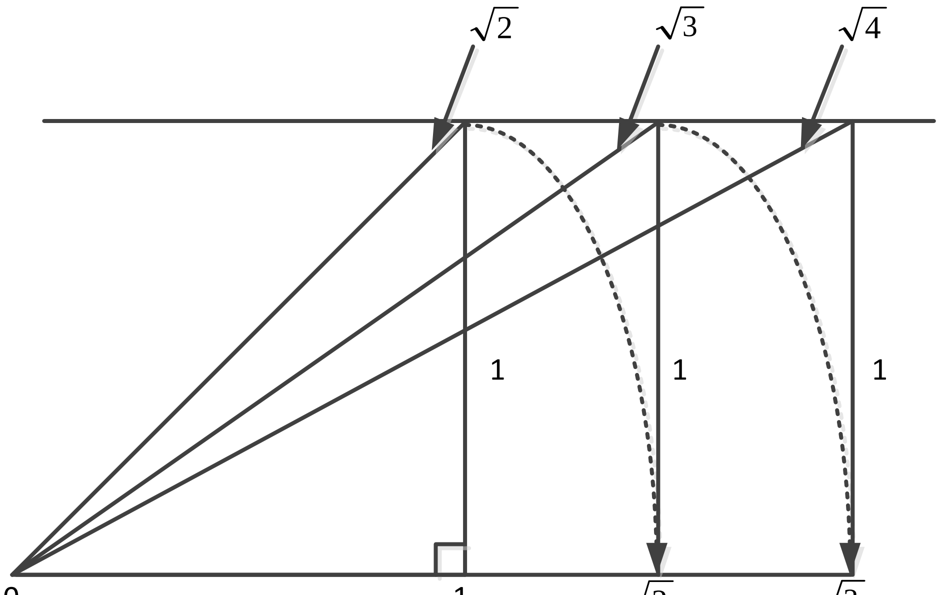
請看下圖，可以利用圓規求得$\sqrt{2}$在數線上的位置。



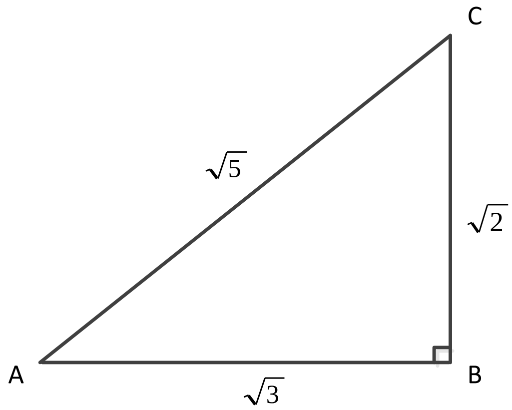
有了$\sqrt{2}$，我們可以求得$\sqrt{3}$，如下圖所示:



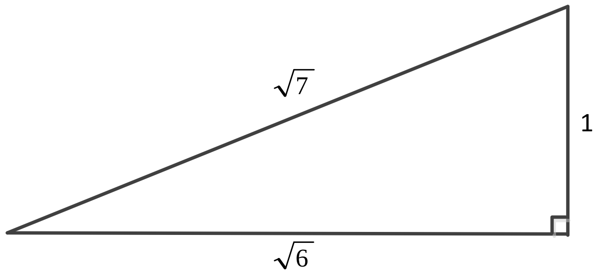
因此我們可以求得任何$\sqrt{n}$在數線上的位置。

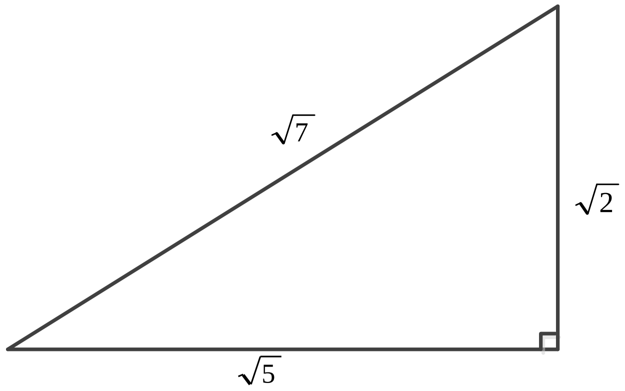


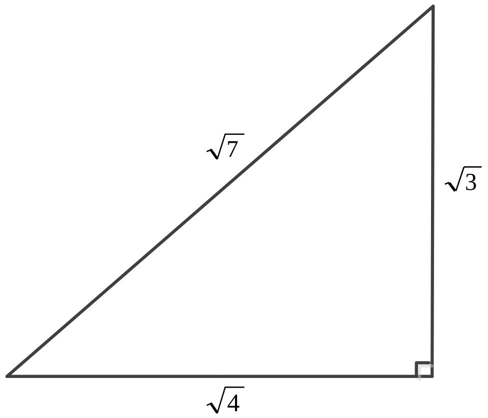
其實，以$\sqrt{5}$為例，我們也可以用以下的三角形求得:



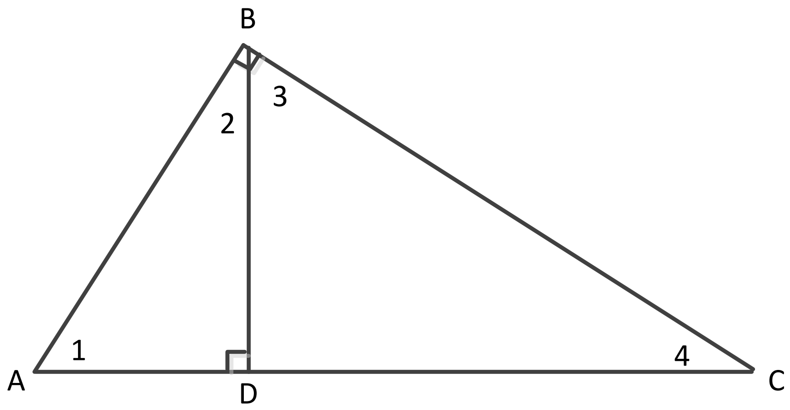
如果要求$\sqrt{7}$，以下的方法都可以。







除了以上的方法，我們還可以利用相似三角形的方法。請看下圖:



$\angle \mathrm{ABC} = 90°$，$\overline{\mathrm{AD}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$

$\angle 2 + \angle 3 = 90°$

$\angle 1 + \angle 2 = 90°$

$\therefore\ \angle 1 = \angle 3$

$\angle 3 + \angle 4 = 90°$

$\therefore\ \angle 2 = \angle 4$

可證$\triangle ABD$和$\triangle BOC$為相似三角形

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\overline{\mathrm{DC}}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\overline{\mathrm{BD}}}}$

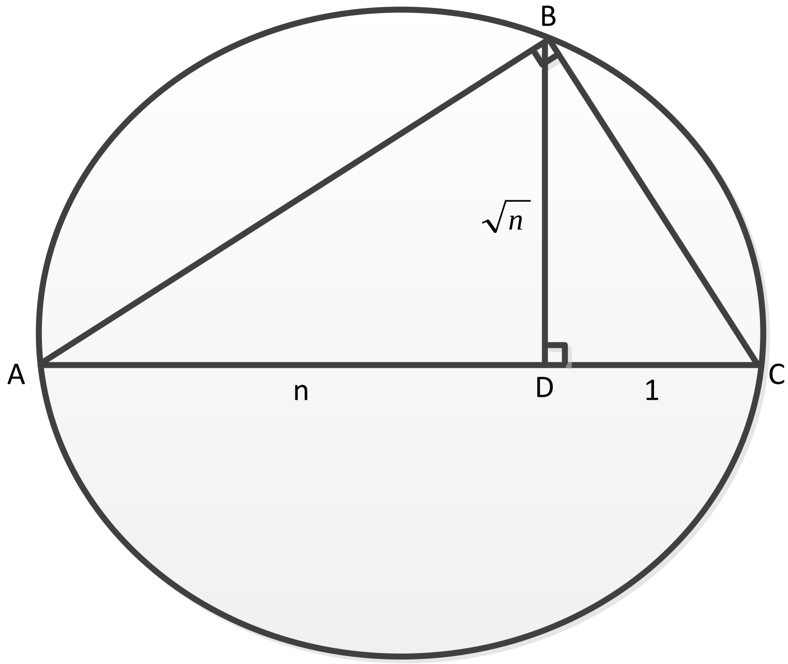
$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{DC}} \times \overline{\mathrm{AD}}$

假如 $\overline{\mathrm{DC}} = 1$，$\overline{\mathrm{AD}} = 2$，則$\overline{\mathrm{BD}}^2 = 2$，$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{2}$

假如 $\overline{\mathrm{DC}} = 1$，$\overline{\mathrm{AD}} = 3$，則$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{3}$

假如 $\overline{\mathrm{DC}} = 2$，$\overline{\mathrm{AD}} = 3$，則$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{6}$

假設我們要求$\sqrt{n}$，利用以下的圖就可以求得。



令$\overline{\mathrm{AD}} = \mathrm{n}$，$\overline{\mathrm{DC}} = 1$，畫一$\overline{\mathrm{AC}}$為直徑的圓，則$\triangle ABC$為一直角三角形，因$\angle \mathrm{ABC}$一定是直角，此時 $\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{DC}} = n$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{\mathrm{n}}$