(65)直線

(1)(0,4),(1,k−1),(k,6)三點共線,求 k 及此直線方程式

令此直線方程式為 y=ax+b

(0,4)在直線上,故 4=a(0)+b

∴ b=4……(1)

(1,k−1)在直線上,故

k−1=a(1)+4

∴ k=a+5

a=k−5……(2)

(k,6)在直線上,故

6=a(k)+4

∴ ak=2

$\mathrm{a}=\frac{2}{k}\ldots\ldots(3)$

代(2)入(3) $\mathrm{k}-5=\frac{2}{k}$

$k^2-5k-2=0$

$\mathrm{k}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-2)}}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\ldots\ldots(4)$

a=k−5

∴ a=$\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}-5=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\ldots\ldots(5)$

∴ 直線方程式是

y=ax+b=$\left(-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right)x+4\ldots\ldots(6)$

驗證(1, k−1)是否在直線

y=$\left(-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right)x+4$

左式= k−1=$\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}-1=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\ldots\ldots(7)$

右式=$\left(-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right)(1)+4=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\ldots\ldots(8)$

∴ 左式=右式，(1, k−1)在直線上。

驗證(k, 6)是否在直線

y=ax+b……(9)

左式=6

右式=$\left(-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right)+4=\frac{33}{4}-\frac{25}{4}+4=\frac{8}{4}+4=6\ldots\ldots(10)$

∴ 左式=右式，(k, 6)在直線上

(2) (0,3)，(2,k)，(3,k-1)三點共線，求 k 及此直線方程式

令此直線方程式為 $y=ax+b$

(0,3)在直線上，故 $3=a(0)+b$

∴ $b=3$……(1)

(2,k)在直線上，故 $k=a(2)+3$
∴ $k=2a+3$……(2)

(3,k-1)在直線上
∴ $k-1=a(3)+3$

$k=3a+4$……(3)

(2)-(3) $0=-a-1$

∴ $a=-1$……(4)

代(4)入(2) $k=2(-1)+3=1$

直線方程式是 $y=-x+3$

驗證

$k=1$，求證$(2,k)=(2,1)$是否在 $y=-x+3$ 上

左式=1
右式=-(2)+3=1
∴ 左式=右式，故(2,k)在 $y=-x+3$ 上

求證是否(3,k-1)在 $y=-x+3$ 上

左式=1-1=0
右式=-(3)+3=0
∴ 左式=右式，故(3,k-1)在 $y=-x+3$ 上

(3) (0, 3)，(2, k)，(3, k+2)三點共線，求 k 及此直線方程式

令此直線方程式為 $y=ax+b$

(0,3)在直線上，故 $3=a(0)+b$

$\therefore$ $b=3$……(1)

(2,k)在直線上，故 $k=a(2)+3$

$\therefore$ $k=2a+3$……(2)

(3,k+2)在直線上

$\therefore$ $k+2=a(3)+3$

$k=3a+1$……(3)

代(3)入(2)　$2a+3=3a+1$

$\therefore$ $a=2$……(4)

代(4)入(3)　$k=3(2)+1=7$……(5)

直線方程式是 $y=2x+3$

求證(2,k)=(2,7)是否在直線上

左式=7
右式=2(2)+3=7

$\therefore$ (2,k)在直線上

驗證(3,k+2)是否在直線上

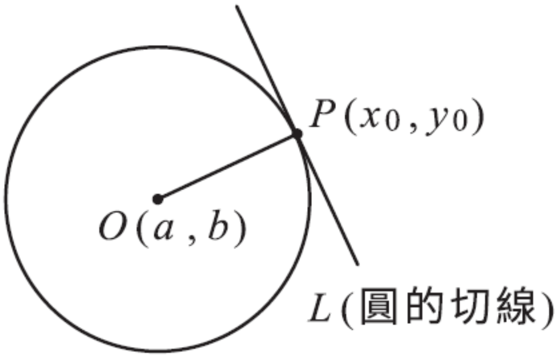
左式=k+2=7+2=9
右式=2(3)+3=9
左式=右式，故(3,k+2)在直線上

圓與切線

圓的方程式

假設圓的中心是(a, b)，半徑是 r，則此圓的方程式是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

我們要討論圓與切線的關係，請看下圖:

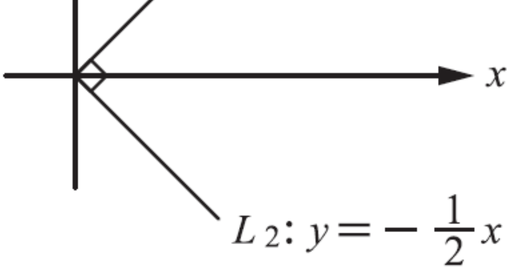


L 是圓的切線，P 是切線與圓的交點，則有以下兩點性質:

(1)L 與 OP 一定互相垂直
(2)O 點至 L 的距離必定是 r

我們先來談談兩條直線互相垂直的性質。如果直線L_1是 $y=a_1x+b_1$，而直線 L_2是 $y=a_2x+b_2$，則$a_1=-\frac{1}{a_2}$

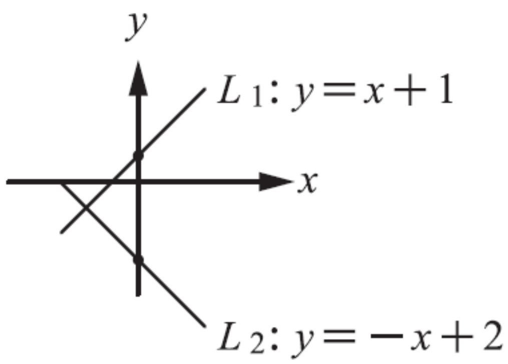
(4) L_1: $y=2x$，與L_1垂直的直線L_2一定是$y=-\frac{1}{2}x$，如下圖所示



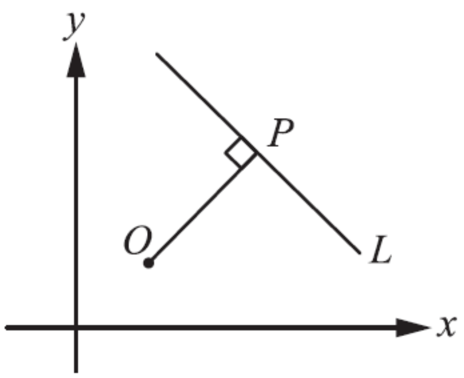
（5）$L_1: y = x + 1$

$L_2: y = -x - 2$

因為$a_1 = -\frac{1}{a_2}$，$L_1 \perp L_2$



再談點與直線的距離，請看下圖:



假設 L 是一條直線，O 是不在 L 上的一點，所謂 O 和 L 的距離是這樣決定的:通過 O 點作一直線與 L 垂直，此直線與 L 的交點是 P，則 O 與 L 的距離是$\overline{OP}$。

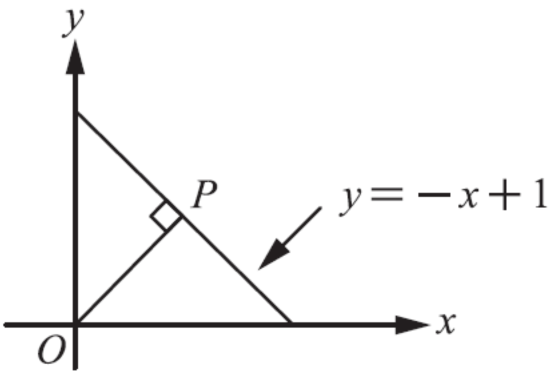
假設 L 的方程式是 y=ax+b，O 的坐標是(x_0, y_0)，則$\overline{OP} = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2+1}}$。

如果有的同學喜歡用 ax+by+c=0 來表示一條直線，則$\overline{OP} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(6) L:y=-x+1

O 是(0,0)

請看下圖:



$$\overline{OP} = \frac{-1(0)-(0)+1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

我們可以驗證以上的結果正確與否，我們先求$\overline{OP}$的方程式。因為$\overline{OP} \perp L$，∴ $\overline{OP}$的斜率是+1，令$\overline{OP}$的方程式為 y=x+b，因(0,0)在$\overline{OP}$上，故 0=0+b，b=0

∴$\overline{OP}$的方程式為 y=x

我們因此有兩個方程式

L:y=-x+1

$\overline{OP}$:y=x

解此二方程式，得$x = \frac{1}{2}$ ，$y = \frac{1}{2}$

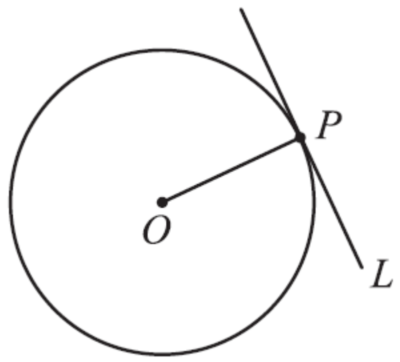
∴ P 點坐標是$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\overline{OP} = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2 + (\frac{1}{2}-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以我們得到的答案是正確的。

在下面，我們將討論圓與切線的關係。

第一類問題:已知圓上一點，求通過此點的圓切線



圓上一點 P 坐標是(x_0, y_0)，圓心 O 的坐標是(c, d)，求通過 P 的圓切線步驟如下:

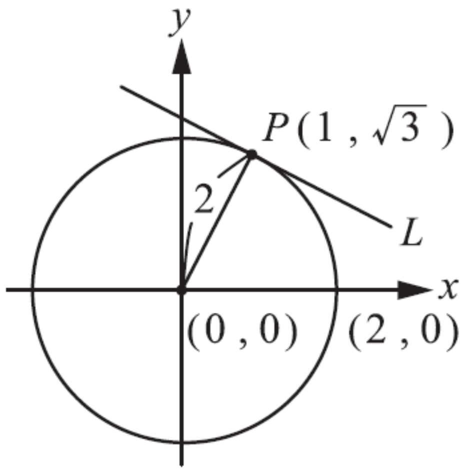
(1)直線$\overline{OP}$的斜率是$\frac{y_0-d}{x_0-c}$

(2)L 的斜率因此是$-(\frac{x_0-c}{y_0-d})$

(3)已知 L 的斜率及 P 坐標，即可求出 L 的方程式

(7)圓心在(0, 0)，半徑是 2，圓的方程式是$x^2+y^2=2^2$

P 點坐標是$(1,\ \sqrt{3})$，求通過 P 的圓切線步驟如下:



方法(1)

1. $\overline{OP}$的斜率是$\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$

2. L 的斜率因此是$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. L 的方程式是$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$

將$(1,\ \sqrt{3})$代入以上方程式

$$\sqrt{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1)+b$$

$$b=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3+1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

∴ L 的方程式是 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{\sqrt{3}}$

方法(2)

已知 L 的方程式是$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$

圓心 O 的坐標是(0,0)，圓心到切線的距離是半徑 r=2

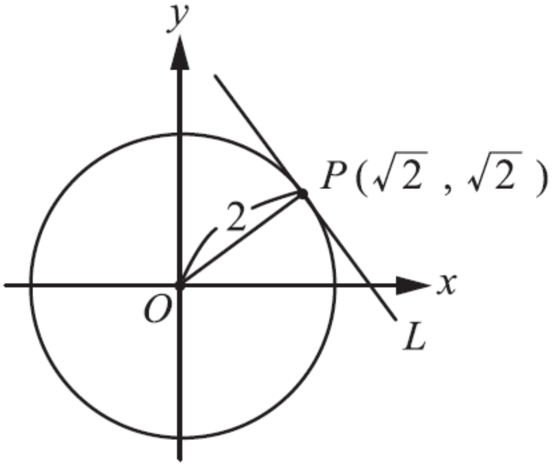
切線方程式是$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$

∴圓心(0,0)到切線的距離是$\frac{\left|\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0)+1(0)-b\right|}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1^2}}=\frac{b}{\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt{3}b}{2}=2$

$\therefore b=\frac{4}{\sqrt{3}}$

切線方程式是$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{\sqrt{3}}$

(8)承上題，假設 P 點坐標是$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，求通過 P 點的切線方程式



方法(1)

1. $\overline{OP}$的斜率是$\frac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}-0} = 1$
2. L 的斜率因此是-1
3. L 的方程式是$y = -x + b$

將$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$代入 L 的方程式

$\sqrt{2} = -\sqrt{2} + b$

$\therefore b = 2\sqrt{2}$
L 的方程式是$y = -x + 2\sqrt{2}$

方法(2)

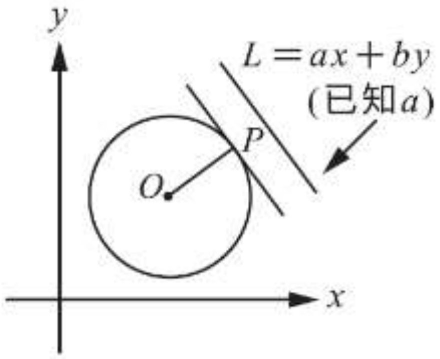
已知 L 的方程式是$y = -x + b$

圓心(0, 0)到 L 的距離是$\frac{|1(0)+1(0)-b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = 2$

$\therefore b = 2\sqrt{2}$

L 的方程式是$y = -x + 2\sqrt{2}$

以下我們討論已知一條直線的斜率，假如這條直線式某一圓的切線，求此直線的方程式。



這個問題很容易解決，我們知道圓心到 L 的距離一定是圓的半徑，因此代入公式即可求出 L 的方程式。

(9)圓心是(0,0)，半徑為 2，L 的方程式$y = -x + b$

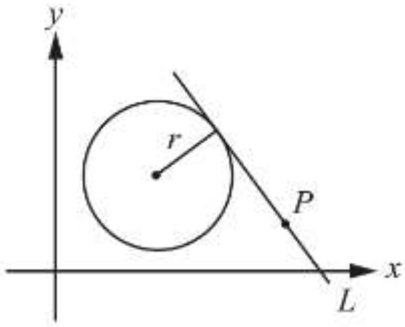
圓心到 L 的距離是$\frac{|1(0)+1(0)-b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = 2$

$\therefore b = 2\sqrt{2}$

如果 L 是圓的切線，則 L 的方程式是$y = -x + 2\sqrt{2}$

在下面，我們假設圓外有一點 P，通過 P 作一圓的切線，求此切線的方程式。

請看下圖



要解此題的原理很簡單，L 和圓心必定是 r，我們用例子來說明。

(10)圓心是(0, 0)，半徑為 2，圓外 P 點的坐標是$(2\sqrt{2},\ 0)$

令通過 P 點的直線方程式為 y=ax+b，將$(2\sqrt{2},\ 0)$代入，得

$0 = 2\sqrt{2}a + b$

$\therefore \mathrm{b} = -2\sqrt{2}a$

$\therefore$ L 的直線方程式是$\mathrm{y} = \mathrm{ax} - 2\sqrt{2}a$

圓心到 L 的距離是$\frac{|1(0)-a(0)+2\sqrt{2}a|}{\sqrt{1+a^2}} = 2$

$\frac{|2\sqrt{2}a|}{\sqrt{1+a^2}} = 2$

$4 \times 2a^2 = 4(1 + a^2)$

$4a^2 = 4$

$a^2 = 1$

$\mathrm{a} = \pm 1$

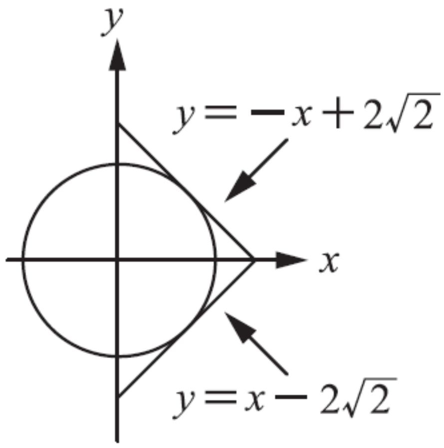
$\mathrm{b} = \mp 2\sqrt{2}$

L 有兩條

$y = x - 2\sqrt{2}$

$y = -x + 2\sqrt{2}$

如下圖所示



(11)圓心(0, 0)，P 點$(0, \frac{4}{\sqrt{3}})$

令切線 L 的方程式為$y = ax + b$

將$(0, \frac{4}{\sqrt{3}})$代入，$b = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\therefore y = ax + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

圓心到 L 的距離是$\frac{\left|1(0)-a(0)-\frac{4}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1+a^2}} = 2$

$$\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+a^2}} = 2$$

$$\frac{16}{3} = 4(1+a^2)$$

$$4a^2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

$$a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ L 的方程式是$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}$，如下圖