(59)矩陣的乘法

假設有一家公司，有3個部門，中午決定都要吃麵，麵店供應三種麵，大滷麵、牛肉麵和炸醬麵，三部門購買的情況下：

部門一：5碗大滷麵、7碗牛肉麵、3碗炸醬麵
部門二：6碗大滷麵、4碗牛肉麵、5碗炸醬麵
部門三：4碗大滷麵、7碗牛肉麵、6碗炸醬麵

三種麵的價格分別是：大滷麵100元、牛肉麵120元、炸醬麵90元
因此各部門的費用如下：

部門一：$5 \times 100 + 7 \times 120 + 3 \times 90 = 500 + 840 + 270 = 1610$
部門二：$6 \times 100 + 4 \times 120 + 5 \times 90 = 600 + 480 + 450 = 1530$
部門三：$4 \times 100 + 7 \times 120 + 6 \times 90 = 400 + 840 + 540 = 1780$

這個問題可以用矩陣相乘來解決的，在正式對矩陣乘法下定義以前，我們先非正式地用以上的例子來說明

我們先將三個部門麵的訂購資料整理成一個3×3的矩陣A

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \textit{部門一訂購資料} \\ \leftarrow \textit{部門二訂購資料} \\ \leftarrow \textit{部門三訂購資料} \end{array}$$

然後，我們定義一個3×1的矩陣B

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 90 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \textit{大滷麵價格} \\ \leftarrow \textit{牛肉麵價格} \\ \leftarrow \textit{炸醬麵價格} \end{array}$$

最後，我們定義一個3×1的矩陣C

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \textit{部門一的費用} \\ \leftarrow \textit{部門二的費用} \\ \leftarrow \textit{部門三的費用} \end{array}$$

矩陣C是由矩陣A和矩陣B的乘積得到的

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{C}$

c_{11}、c_{21}、c_{31}是由以下的式子得到的

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 5 \times 100 + 7 \times 120 + 3 \times 90 = 1610$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = 6 \times 100 + 4 \times 120 + 5 \times 90 = 1530$$
$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 4 \times 100 + 7 \times 120 + 6 \times 90 = 1780$$

矩陣的乘法如下：

假設A是一個$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$的矩陣，B是一個$\mathrm{n} \times \mathrm{k}$的矩陣，$\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$，則C是一個$\mathrm{m} \times \mathrm{k}$的矩陣，而$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

如下圖所示：

$$\underset{A}{\overset{m \times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}} \times \underset{B}{\overset{m \times k}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}}} = \underset{C}{\overset{m \times k}{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mk} \end{bmatrix}}}$$

(1)$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 1 \times 1 + 3 \times 2 \\ -1 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 1 + 6 \\ -3 + 5 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(2)$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + (-1) \times 3 & 3 \times 2 + (-1) \times (-1) \\ -5 \times 1 + 2 \times 3 & -5 \times 2 + 2 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3 & 6 + 1 \\ -5 + 6 & -10 - 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}$$

(3)$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$A \times B = [3 \times 1 + (-2) \times 5] = [3 - 10] = [-7]$$

(4)$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 5 \\ 0 \times 3 + 1 \times 2 & 0 \times 1 + 1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(5) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 \times 4 + 1 \times 5 & 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 4 + 0 \times 5 & 1 \times 2 + 0 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 0 \times 4 \\ 0 \times 2 + (-1) \times 3 & 0 \times 1 + (-1) \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 1 \times 4 & 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ (-1) \times 3 + (-1) \times 4 & (-1) \times 2 + (-1) \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 4 & 2 + 1 \\ -3 - 4 & -2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

(8)$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 5 + 1 \times (-1) & 3 \times 1 + 1 \times 2 & 3 \times 3 + 1 \times 1 & 3 \times 4 + 1 \times 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 - 1 & 3 + 2 & 9 + 1 & 12 + 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & 5 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

(9)$\begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 3 + 5 \times 2 & -1 \times 1 + 5 \times (-1) & -1 \times 6 + 5 \times 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -3 + 10 & -1 - 5 & -6 + 25 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & -6 & 19 \end{bmatrix}$$

(10)$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1+1\times 2+2\times 3 \\ -1\times 1+4\times 2+3\times 3 \\ 5\times 1+1\times 2+2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \\ 13 \end{bmatrix}$

(11)$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}\times 1+\frac{2}{5}\times 4 & -\frac{3}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times 3 \\ \frac{4}{5}\times 1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times 4 & \frac{4}{5}\times 2+\left(-\frac{1}{5}\right)\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}+\frac{8}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5}-\frac{4}{5} & \frac{8}{5}-\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(12)$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4-1\times 2 & 3\times 1-1\times 3 \\ -2\times 4+4\times 2 & -2\times 1+4\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-2 & 3-3 \\ -8+8 & -2+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

(13)$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1+2(-1) & 3(-2)+2\times 3 \\ 1\times 1+1(-1) & 1(-2)+1\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -6+6 \\ 1-1 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同學們一定會對以上的三題感到好奇，我們以後會詳加說明的。

關於矩陣乘法，有一點是需要注意的，那就是$\mathrm{A}\times\mathrm{B}$不一定等於$\mathrm{B}\times\mathrm{A}$，以下的例子可以證明這些:

(14)$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{bmatrix}3\times2+1\times4 & 3\times1+1\times2\\ -2\times2+4\times4 & -2\times1+4\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6+4 & 3+2\\ -4+16 & -2+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 5\\ 12 & 6\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}\times\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times3+1(-2) & 2\times1+1\times4\\ 4\times3+2(-2) & 4\times1+2\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-2 & 2+4\\ 12-4 & 4+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 8 & 12\end{bmatrix}$$

可見得$\mathrm{A}\times\mathrm{B}\neq\mathrm{B}\times\mathrm{A}$

(15)$A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=[1\times3+2\times4]=[3+8]=[11]$$

$$\mathrm{B}\times\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times2\\ 4\times1 & 4\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 4 & 8\end{bmatrix}$$

可見得$\mathrm{A}\times\mathrm{B}\neq\mathrm{B}\times\mathrm{A}$
但有時$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{B}\times\mathrm{A}$

(16)$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times3 & 1\times2+0\times4\\ 0\times1+1\times3 & 0\times2+1\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}\times\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1\\3\times1+4\times0 & 3\times0+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

這一題$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{B}\times\mathrm{A}$

反矩陣

所謂反矩陣是這樣定義的，假設有A和B兩個方矩陣，而$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，則B是A的反矩陣，在這個講義中，我們的A、B矩陣都是2×2的方矩陣，先看一個例子。

假設$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$

如果$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，則

$\mathrm{a}x_{11}+bx_{21}=1\cdots$ ①
$\mathrm{c}x_{11}+dx_{21}=0\cdots$ ②
$\mathrm{a}x_{12}+bx_{22}=0\cdots$ ③
$\mathrm{c}x_{12}+dx_{22}=1\cdots$ ④

從②可得$x_{11}=-\frac{d}{c}x_{21}\cdots$ ⑤

代⑤入① $-\mathrm{a}\left(\frac{d}{c}x_{21}\right)+bx_{21}=1$

$$-\mathrm{a}dx_{21}+bcx_{21}=c$$
$$x_{21}(-ad+bc)=c$$
$$x_{21}=\frac{-c}{ad-bc}\cdots ⑥$$

代⑥入⑤ $x_{11}=-\frac{d}{c}\left(\frac{-c}{ad-bc}\right)=\frac{d}{ad-bc}$

同理可得$x_{12} = \frac{-b}{ad-bc}$

$x_{22} = \frac{a}{ad-bc}$

因此$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

注意:$\mathrm{ad} - \mathrm{bc}$不可為 0

(17)$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2$

$\therefore B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(18) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 5 - 4 = 1$

$\therefore B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-4 & -2+2 \\ 10-10 & -4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

值得注意的是$\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1$，如果$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則$B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

同學們可以看出對B而言，A是它的反矩陣，以第(18)題為例，我們證明A ×

$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，在下一題我們可以證明$B\times A$也等於$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(19)承(18)題

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}$

在第(18)題上證明了$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，現在我們看$B\times A$

$$B\times A=\begin{bmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-4 & 10-10\\-2+2 & -4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(20)$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$

$$ad-bc=2\times 2-3\times 1=4-3=1$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3 & -6+6\\2-2 & -3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3 & 6-6\\-2+2 & -3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

對$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$而言，$ad-bc$叫做A矩陣的行列式。

如果A矩陣的行列式等於0，則A沒有反矩陣。