

(51) 機率-2(排列組合)

在這一章，我們要討論與排列組合相關的機率問題。

(1) 袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，拿出一顆蘋果的機率是多少？

$$\text{答案: } \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$$

(2) 承上題，連續拿 2 顆都是桃子的機率是多少？

答案: 第一次拿出桃子的機率是 $\frac{4}{9}$ 。

第二次拿出水果時，水果總數變成了 8 個，因此仍然拿出桃子的機率是 $\frac{3}{8}$ 。

因此，這題的機率是 $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$ 。

(3) 承上題，兩次拿水果，拿出 1 顆桃子和 1 顆蘋果的機率是多少？

答案: 有兩種可能:

(a) 先拿出桃子，後拿出蘋果，其機率是 $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$ 。

(b) 先拿出蘋果，後拿出桃子，其機率是 $\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$ 。

因此，此題的機率是 $\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$ 。

(4) 丟一個銅板 5 次，結果是 3 次正面向上，2 次背面向上的機率是多少？

我們以 1 代表正面向上，0 代表背面向上，以下是幾個 3 次正面向上，2 次背面向上的例子:

11100

10101

00111

01110

所以我們可以將此問題看成 3 個 1 和 2 個 0 的排列，排列總數是

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)} = 10。$$

總共可能出現的情形有 $2^5 = 32$ 種，故此題的機率是 $\frac{\frac{5!}{3!2!}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ 。

(5) 將 1, 2, 3, 4, 5 排列，2 出現在第一位的機率是多少？

因為 2 一定要出現在第一位，我們只要排列 1, 3, 4, 5，排列的方法是 $4!$ ，總共排列的方法有 $5!$ 種，故此題的機率是 $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$ 。

(6) 有 5 位男生和 5 位女生排成一列，每位男生旁邊必有一位女生的機率是多少？

因為每一位男生旁邊必有一位女生，我們先將 5 位男生排成一排，但中間有空格，如下圖：

OXOXOXOXOXO

以上的圖中，X 是 5 位男生站的地方，還有 6 個空格可以讓 5 位女生去站。男生排列有 $5!$ 種方法，女生排列有 P_5^6 種方法，因此這種排列的方法有 $5!P_5^6$ 種。10

個人排列的方法有 $10!$ 種，因此，此題的機率是 $\frac{5!P_5^6}{10!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{42}$ 。

(7) 丟銅板 6 次，每兩次結果都相同的機率是多少？

丟銅板的結果是 1 或 0，兩次連相同只有 2 種可能 (1, 1) 或 (0, 0)，雖然丟了 6 次銅板，我們應該看成只有 3 個事件，如 (0, 0)(1, 1)(1, 1) 或 (1, 1)(0, 0)(1, 1)。因此，合乎這個條件的事件共有 $2^3 = 8$ 種可能，丟銅板 6 次，共有 $2^6 = 64$ 種可能，

故此題的機率是 $\frac{2^3}{2^6} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ 。

(8) 丟銅板 8 次，5 次正面，3 次反面的機率是多少？

我們可以想成 5 個 1 和 3 個 0 的排列，這種排列的方法有 $\frac{8!}{5!3!} = 56$ 種。

丟銅板 8 次，共有 $2^8 = 256$ 種可能，故此題的答案是 $\frac{8!}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}$ 。

(9) 將 26 個英文字母排列，x 落在第 a 位置的機率是多少？

這個問題並不必看成一個排列的問題，而應該想成，將 x 落入 a 位置的機率。

一共有 26 個位置，因此 x 落入 a 位置的機率是 $\frac{1}{26}$ 。

(10) 將 26 個英文字母排列，e 和 g 必須相鄰的機率是多少？

e 和 g 必須相鄰，可以看成一個物件，這個物件內部排列有 $2!$ 種方法，因此合乎條件的排列共有 $(25!)(2!)$ 種。

全部排列有 $26!$ 種

此題的機率是 $\frac{25!2!}{26!} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$ 。

(11) 將 26 個英文字母排列，x 落在 a 處，y 落在 b 處的機率是多少？

x 落在 a 處的機率是 $\frac{1}{26}$ 。

y 再落在 b 處的機率是 $\frac{1}{25}$ 。

因此，此題的機率是 $\frac{1}{26} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{650}$ 。

(12) 從 1, 2, 3, 4, 5 中取出 2 個數字，兩個都是奇數的機率是多少？

1, 2, 3, 4, 5 中，有 3 個數字是奇數，取出 2 個的情形有 C_2^3 種，5 個數字中，取 2

個的情形有 C_2^5 種，故此題的機率是 $\frac{C_2^3}{C_2^5} = \frac{\frac{3 \times 2}{2}}{\frac{5 \times 4}{2}} = \frac{3}{10}$ 。

(13) 將 1, 2, 3, 4, 5 排列，前 2 項是奇數的機率是多少？

3 個奇數取出 2 個排列，共有 $P_2^3 = 6$ 種排列方法，其餘的 3 個數字排列方法有 $3!$ 種。

合乎條列的排列有 $P_2^3 3! = (3 \times 2)(3 \times 2 \times 1) = 36$ 種。

5 個數字的排列有 $5!$ 種，故此題的機率是 $\frac{P_2^3 3!}{5!} = \frac{(3 \times 2) 3!}{5 \times 4 \times 3!} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ 。

(14)將英文字母 a, b, c, d, e 排列，其中 a 和 b 之間必須夾一個字母的機率是多少？

a 和 b 之間的字母一定是 c, d, e 中的一個，選擇方法有 3 種。

a 和 b 之間夾一個字母，這 3 個字母構成一個物件，這個物件的排列方法有 2! 種，因為 a 和 b 可以交換。

除了這 3 個字母的物件以外，還有 2 個字母，因此共有 3 個物件。合乎條件的排列共有 $3(3!)(2!)$ 種。

全部 5 個字母的排列方法有 5! 種，故此題的機率是 $\frac{3 \times 3! 2!}{5!} = \frac{3 \times (3!)(2!)}{5 \times 4 \times 3!} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(15)從 1, 2, 3, 4, 5 中選出 2 個數字組成一個 2 位數，可以重複選，但這 2 個數字必須不同的機率是多少？

因為 2 個數字不同，因此情形共有 P_2^5 種。

因為可以重複選取，全部可能的數字有 5^2 種。

故此題的機率是 $\frac{P_2^5}{5^2} = \frac{5 \times 4}{5 \times 5} = \frac{4}{5}$ 。

(16)數字 1, 3, 3, 5 排成一個 4 位數，千位數是 5 的機率是多少？

千位數是 5，剩下 3 個數字 1, 3, 3，這 3 個數字的排列方法有 $\frac{3!}{2!}$ 種。所有的排列

方法有 $\frac{4!}{2!}$ 種，故此題的機率是 $\frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{4!}{2!}} = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ 。

(17)承上題，假如千位數是 3 的機率是多少？

千位數是 3 以後，尚有 3 個數字要排列，因此合乎條件的排列有 3! 種，全部排

列有 $\frac{4!}{2!}$ 種，故此題的機率是 $\frac{3!}{\frac{4!}{2!}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

(18)數字 0, 0, 1, 2, 2 排成一個 5 位數，但必須是 5 的倍數的機率是多少？

任何數字如是 5 的倍數，其個位數必須是 0 或 5，本題沒有 5，只有 0。

萬位數只可以是 1 和 2，同時，個位數是 0。

假設萬位數是 1，個位數是 0，剩下 0, 2, 2 的排列，共有 $\frac{3!}{2!}$ 種方法。

假設萬位數是 2，個位數 1 是 0，剩下 0, 1, 2 的排列，排列方法有 3! 種。

合乎條件的排列有 $\frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9$ 種。

5 個數字 0, 0, 1, 2, 2 組成 5 位數，有 2 種情形：

萬位數是 1，剩下 0, 0, 2, 2 的排列，有 $\frac{4!}{2!2!}$ 種方法。

萬位數是 2，剩下 0, 0, 1, 2 的排列，有 $\frac{4!}{2!}$ 種方法。

故此題的機率是 $\frac{\frac{3!}{2!} + 3!}{\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!}} = \frac{3+6}{6+12} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ 。

(19) 數字 0, 0, 1, 2, 2 能組成 5 位數的機率是多少？

方法 1: 5 位數的萬位數不能是 0，一定要在 1, 2, 2 中選一個，選取方法有 2 種，非 1 即 2。

若萬位數是 1，剩下 0, 0, 2, 2，有 $\frac{4!}{2!2!}$ 種排列方法。

若萬位數是 2，剩下 0, 0, 1, 2，有 $\frac{4!}{2!}$ 種排列方法。

故合乎條件的排列有 $\frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{2!}$ 。

5 個數字全選的排列方法是 $\frac{5!}{2!2!}$ 。

故此題的機率是 $\frac{\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{2!2!}} = \frac{12+6}{\frac{5 \times 4 \times 3!}{4}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ 。

方法 2: 要解這個題目還有一個方法，要知道 5 位數的萬位數不能是 0，因此我們先看首位是 0 的排列有多少。

0, 0, 1, 2, 2 中有 2 個 0，選定任何一個 0 以後的排列有 $\frac{4!}{2!}$ 種。

首位為 0 的排列共有 $\frac{4!}{2!}$ 種。

全部排列的數目是 $\frac{5!}{2!2!}$ 。

∴ 首位為 0 的機率是 $\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{5!}{2!2!}} = \frac{12}{\frac{5!}{4}} = \frac{12}{5 \times 3 \times 2} = \frac{2}{5}$ 。

∴ 首位不為 0 的機率是 $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ 。

故此題的機率是 $\frac{3}{5}$ 。

(20) 袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 2 顆蘋果的機率是多少？

$$\text{答案: } \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

(21) 袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 2 顆桃子的機率是多少？

$$\text{答案: } \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

(22) 袋子裡有 5 顆蘋果和 4 顆桃子，兩次拿水果，拿出 1 顆蘋果和 1 顆桃子的機率是多少？

$$\text{答案: } \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

各位同學可以看出，從袋子裡拿出 2 個水果，只有以上所說的 3 種情形。機率總

和是 $\frac{5}{18} + \frac{1}{6} + \frac{5}{9} = \frac{5+3+10}{18} = \frac{18}{18} = 1$ ，可見得上面的想法是對的。