(46)排列-4(不全相異，全選，直線)

在過去，我們假設所有的物件是相異的，在這一章，我們假設有些物件是相同的而且全選排列的種類會少得多。

假設我們有 3 個物件，3 個物件都是a，我們可以將他們命名為a_1、 a_2、 a_3，請注意a_1, a_2和 a_3，其實都是a，並無不同。
因為$n = 3$，因此a_1, a_2和 a_3的全選排列有$P_3^2 = 3! = 6$種，但事實上，他們只有一種排列，那就是
aaa

假設我們有 2 個a 和 1 個b，我們可以將它們命名為a_1, a_2和b，它們也只有 6 種排列如下：
a_1a_2b
a_1ba_2
a_2a_1b
a_2ba_1
ba_1a_2
ba_2a_1

但因為a_1和a_2都是a，因此只有以下三種排列
aab
aba
baa

假設我們有 n 個物件，其中有$r1, r2, \dots, r_k$物件是相同的，它們的排列種類可以用以下的公式得到

$$\frac{P_n^n}{P_{r_1}^{r_1}P_{r_2}^{r_2}\dots P_{r_k}^{r_k}} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_k!}$$

(1)假設我們有 3 個橘子和 4 個蘋果，他們的排列種類有多少？

答案：
$n = 3 + 4 = 7$
$r1 = 3$
$r2 = 4$
排列種類有

$$\frac{P_7^7}{P_3^3P_4^4} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(4\times3\times2\times1)} = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} = 7\times5 = 35$$

(2)假設我們有2 個a，3 個b，1 個c和 1 個d，他們排列有多少個？

答案：

$n = 2 + 3 + 1 + 1 = 7$

$r_1 = 2$

$r_2 = 3$

$r_3 = 1$

$r_4 = 1$

排列的種類有

$$\frac{7!}{(2!)(3!)(1!)(1!)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 6} = 420$$