(44)排列-2(相異，部分選擇，不能複選，直線)

假設我們有n個相異的物件，我們只能選$r(r \leqq n)$個物件來排列。我們先假設$r=2$，物件以1,2,3,4代表，所有的排列如下:

1,2
1,3
1,4
2,1
2,3
2,4
3,1
3,2
3,4
4,1
4,2
4,3

一共有 *12* 種排列方法。同學們要知道，如果全選，共有$4!=4\times3\times2\times1=24$種排列方法，如果不全選，排列方法少得多。

如果全選，共有$n(n-1)(n-2)\cdots=n!$個排列方法，如果只選r個，則
第一位置有n個選擇
第二位置有$(n-1)$個選擇
⋮
第r個位置有$(n-r+1)$個選擇

所以排列方法有$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$種，通常我們用P_r^n代表部份選擇的排列方法數目。

$$P_r^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44-1)$$

$(44-1)$可以寫成另一種形式:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

∴ P_r^n可以用以下的公式:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{P_r^n}{(n-1)!} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (44-2)$$

同學們最好仍用$(44-1)$這個公式，因為這個公式很容易了解，也可以使同學知道P_r^n是如何求得的。

(1)5 個不同的數字，取 2 個數字的排列

$P_2^5 = 5 \times 4 = 20$

(2)6 個不同的數字，取 3 個數字的排列

$P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

(3)已知$P_4^n = 4P_3^n$，求 n

$P_4^n = n(n-1)(n-2)(n-3)$

$P_3^n = n(n-1)(n-2)$

∴ $n(n-1)(n-2)(n-3) = 4n(n-1)(n-2)$

$n - 3 = 4$

$n = 7$

(4)已知$P_{r+1}^{10} = 5P_r^{10}$，求 r

$P_{r+1}^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots (10-r+1)(10-r)$

$P_r^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times \cdots (10-r+1)$
∴ $10 \times 9 \times 8 \times \cdots (10-r+1)(10-r) = 5 \times 10 \times 9 \times 8 \times \cdots (10-r+1)$

∴ $10 - r = 5$
$\mathrm{r} = 5$

(5)10~99 中，有多少數字是由不同奇數所組成?
奇數是 1,3,5,7,9，個位數和十位數必須是不同的奇數，舉例來說，33 不是我們要的，52 也不是我們要的，這個問題其實就是從 1,3,5,7,9 中選 2 個數字來排列。

$P_2^5 = 5 \times 4 = 20$

這 20 個數字是
13,15,17,19
31,35,37,39
51,53,57,59
71,73,75,79
91,93,95,97

(6)00~99 中，有多少數字是由不同數字所組成?
十位數有 10 個數字可選，一旦選了，個位數只有 9 個數字可選，所以答案是 $P_2^{10} = 10 \times 9 = 90$。

從這個答案，我們可以知道 00~99 中，有 100−90=10 個數字是由相同數字組成的，它們是 00,11,22,33,44,55,66,77,88,99。

(7)000~999 中，有多少數字是由不同數字所組成?
這題等於從 0~10 中取 3 個數字來排列，因此答案是$P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$。
從這個答案，我們可以看出 000~999 中，有 1000−720=280 個數字，百位數、十位數和個位數中，至少有兩個數字是相同的，如
252,337,414,535,616,770,818,999。

(8)有一個三位數，其中有 2 個數字是 3，請問這種數字有多少個?
符合這題的數字有 337, 433, 553, 393, 338 等等。

我們首先要問，不同於 3 的數字可以放在哪裡?
答案是$P_1^3 = 3$
不同於 3 的數字可以放在百位數、十位數和個位數的任一位置
不同於 3 的數字一共有 9 個，因此這題的答案是$P_1^3 P_1^9 = 3 \times 9 = 27$
它們是:

033	303	330
133	313	331
233	323	332
433	343	334
533	353	335
633	363	336
733	373	337
833	383	338
933	393	339

(9)000~999 中，有 2 個或 3 個相同數字組成的數字有多少個?
對任一個三位數，所有組成數字都一樣的，只有 10 個，它們是 000, 111, 222, ⋯, 999。一共有 10 個數字(0~9)可以相同，根據以上題目，每選一個數字，可以在一個三位數中兩兩相同，共有$1 + P_1^3 P_1^9 = 28$個數字中，至少有 2 個數字相同。從 0~9 中，我們有 10 種選擇，因此從 000~999，共有$P_1^{10}(1 + P_1^3 P_1^9) = 10 \times 28 = 280$。

在題(7)中，我們知道有 280 個數字中的組成數字是不同的，現在我們知道 280 是如何求得的。

假設同樣的數字是 2，這 28 個數字如下:
222
220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229
202, 212, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292
022, 122, 322, 422, 522, 622, 722, 822, 922

一共 28 個