(40)等差級數

請看以下的數列:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

我們可以看出，$a_i - a_{i-1}$都等於 2，比方說$a_7 - a_6 = 13 - 11 = 2$，$a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$，這個數列是一個等差數列。

等差級數有一個首項a_1和公差 d，而且$a_i - a_{i-1} = d$

或者說

$a_{i+1} = a_i + d$ ……………………………………………………………(1)

(1) $a_1 = 2$，$d = 3$

$a_2 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = 11 + 3 = 14$

3，5，8，11，14 是一個等差級數

(2) $a_1 = 1$，$d = -2$

$a_2 = 1 - 2 = -1$

$a_3 = -1 - 2 = -3$

$a_4 = -3 - 2 = -5$

$a_5 = -5 - 2 = -7$

∴ 1，-1，-3，-5，-7 是一等差級數

(3) $a_1 = 0$，$d = \frac{1}{2}$

$$a_2 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_5 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

0，$\frac{1}{2}$，1，$\frac{3}{2}$，2是一等差級數

(4) $a_1 = 1$，$d = -\frac{1}{2}$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_4 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$a_6 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_7 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$\therefore$ 1，$\frac{1}{2}$，0，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$，-2是一等差級數

我們有另一種方法來給等差級數下一定義，請看以下的式子

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

由此我們可以得到

$a_i = a_1 + (i-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(5) $a_1 = 2$，$d = 3$

$a_4 = 2 + (4-1) \times 3 = 2 + 9 = 11$

我們也可以計算一下來驗證

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

(6) $a_1 = -1$，$d = -2$

$a_5 = -1 + (5-1) \times (-2) = -1 + 4 \times (-2) = -1 - 8 = -9$

驗證

$a_1 = -1$

$a_2 = -1 - 2 = -3$

$a_3 = -3 - 2 = -5$

$a_4 = -5 - 2 = -7$

$a_5 = -7 - 2 = -9$

(7) $a_1 = 1$，$d = \frac{1}{2}$

$$a_4 = 1 + (4-1) \times (\frac{1}{2}) = 1 + 3 \times (\frac{1}{2}) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

驗證

$a_1 = 1$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$a_4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(8) $a_1 = -2$，$d = -\frac{1}{2}$

$$a_3 = -2 + (3-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - 1 = -3$$

驗證

$a_1 = -2$

$a_2 = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$a_3 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

等差級數的首項也可以用公式註明的

(9) $a_i = 2\mathrm{i} + 1$

這個數列如下:

$a_1 = 2(1) + 1 = 3$
$a_2 = 2(2) + 1 = 5$
$a_3 = 2(3) + 1 = 7$
$a_4 = 2(4) + 1 = 9$
$a_5 = 2(5) + 1 = 11$

以下是這個數列:

3，5，7，9，11，13，15，17，19，21

同學們一看就知道這是個等差級數，同學們一定會問，等差級數的首項和差 d 是什麼?

因為$a_i = 2\mathrm{i} + 1$

$\therefore\ a_1 = 2(1) + 1 = 3$

$d = a_i - a_{i-1} = (2i+1) - [2(i-1)+1] = 2i + 1 - 2i + 2 - 1 = 2$

(10)　　$a_i = -2\mathrm{i} + 1$

$a_1 = -2(1) + 1 = -1$
$a_2 = -2(2) + 1 = -3$
$a_3 = -2(3) + 1 = -5$
$a_4 = -2(4) + 1 = -7$

以下是這個數列:
-1，-3，-5，-7，-9，-11，-13

這也是一個等差級數

$a_1 = -2(1) + 1 = -2 + 1 = -1$
$d = a_i - a_{i-1} = (-2i + 1) - [-2(i-1) + 1] = -2i + 1 + 2i - 2 - 1 = -2$

等差級數的和

假設a_1，a_2，⋯ ，a_n是一個等差級數，我們可以用

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

來代表這個等差級數的和

現在我們考慮 n 是偶數的等差級數

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	3	5	7	9	11	13	15

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$$

要求等差級數的和，我們可以如此做

先求$a_1 + a_n = a_1 + a_8 = 1 + 15 = 16$
再求$a_2 + a_{n-1} = a_2 + a_7 = 3 + 13 = 16$
再看$a_3 + a_{n-2} = a_3 + a_6 = 5 + 11 = 16$

換句話說，我們可以說

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$

如果一個等差級數的首項是a_1，公差是 d，則

$a_i = a_1 + (i-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

末項$a_n = a_1 + (n-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

假設$a_1 = -2$，$d = 3$，$n = 7$

$a_7 = a_1 + (7-1)d = (-2) + 6(3) = -2 + 18 = 16$

假設$a_1 = 1$，$d = \frac{1}{2}$，$n = 5$

$a_5 = a_1 + (5-1)d = 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 1 + 2 = 3$

假設$a_1 = -1$，$d = -2$，$n = 4$

$a_4 = a_1 + (4-1)d = -1 + 3(-2) = -1 - 6 = -7$

以下的式子是很容易了解的:

$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d) = 2a_1 + (n-1)d$

$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_1 + (n-3)d) = 2a_1 + (n-1)d$

$a_4 + a_{n-3} = (a_1 + 3d) + (a_1 + (n-4)d) = 2a_1 + (n-1)d$

因此，我們可以將a_1，a_2，$\cdots$ ，a_n分成$\frac{n}{2}$份

$(a_1，a_n)$

$(a_2，a_{n-1})$

$\vdots$

$(a_{\frac{n}{2}}，a_{\frac{n}{2}+1})$

因為每一組的和都是一樣的，我們可以得到下列的式子:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

以上的討論，假設 n 是偶數，如果 n 是奇數，$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$仍然是成立的。

我們先看一個例子 n=5，

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	3	5	7	9

以上的數列是一個等差級數

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

此時$a_1 + a_n = a_1 + a_5 = 1 + 9 = 10$

$a_2 + a_{n-1} = a_2 + a_4 = 3 + 7 = 10$

但還有一個$a_3 = 5$，我們知道

$$a_3 = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$$

如果 n 是奇數，$a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{a_1+a_n}{2}$

因為 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} \cdots = a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+3}{2}}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n)\frac{n-1}{2} + \frac{a_1 + a_n}{2} = (a_1 + a_n)(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}) = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$$

因為 n 是奇數，我們也可以用以下的式子

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

也許大家會問$\frac{a_1+a_n}{2}$一定是偶數嗎?

要知道，$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\therefore\ a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$

但$(n-1)$是偶數

$\therefore\ a_1 + a_n = 2a_1 + 2hd$

$\therefore\ a_1 + a_n$是偶數

(11)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	3	5	7	9	11

$n = 6$(偶數)

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} = (1 + 11)\frac{6}{2} = (12)(3) = 36$$

同學們可以驗證這個結果

(12)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	3	5	7	9	11	13

$n = 7$(奇數)

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = \frac{1+13}{2} \times 7 = 7 \times 7 = 49$$

同學們可以驗證這個結果

(13)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−3	−5	−7	−9	−11	−13

$n = 6$(偶數)

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = (a_1 + a_6)\frac{6}{2} = (-3-13)\frac{6}{2} = (-16)\frac{6}{2} = -48$$

(14)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
−2	0	2	4	6	8	10

$n = 7$(奇數)

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = (\frac{-2+10}{2}) \times 7 = \frac{8}{2} \times 7 = 28$$

同學們可以看出公式(5)和公式(6)是一樣的，因此我們可以用以下的公式:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

我們還有一些有趣的求和公式

$\because\ a_1 = a_1$，$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

(15)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
−3	−5	−7	−9	−11	−13

$a_1 = -3$，$d = -2$，$n = 6$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d} = 6(-3) + \frac{6 \times 5}{2}(-2) = -18 - 30 = -48$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = (a_1 + a_6)\frac{n}{2} = (-3 - 13)\frac{6}{2} = (-16)3 = -48$$

(16)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
−2	0	2	4	6	8	10

$a_1 = -2$，$d = 2$，$n = 7$

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d} = 7(-2) + \frac{7 \times 6}{2}(2) = -14 + \frac{42}{2}(2) = 28$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = (\frac{-2+10}{2}) \times 7 = 4 \times 7 = 28$$

(17)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	2	3	4	5

$a_1 = 1$，$d = 1$ ，$n = 5$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d} = 5 \times 1 + \frac{5 \times 4}{2} \times 1 = 5 + 10 = 15$$

我們也可以用公式(5)

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = (\frac{1+5}{2}) \times 5 = 3 \times 5 = 15$$

第 17 題給了我們一個有用的公式

$a_1 = 1$，$d = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d} = \mathrm{n} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

也可以直接用公式(5)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = \frac{1+n}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

各位同學應該記住這個公式

$a_i = a_{i-1} + 1$，$a_1 = 1$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

我們現在繼續討論等差級數的和

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

我們可以利用公式(7)來計算等差級數的和

(18)　　$a_1 = 1$，$d = 2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n = \frac{2}{2}n^2 + (1 - \frac{2}{2})n = n^2$$

假設等差級數是 1，3，5，7，9，11，$n = 6$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (\frac{a_1 + a_n}{2})n = \frac{1+11}{2} \times 6 = 6 \times 6 = 36 = n^2$$

(19)　$a_1 = 1$，$d = -2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = \frac{-2}{2}n^2 + \left(1 + \frac{2}{2}\right)n = -n^2 + 2n$$

這個等差級數是 1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \frac{1-11}{2} \times 7 = \frac{-10}{2} \times 7 = -35$$

$$-n^2 + 2n = -(7)^2 + 2 \times 7 = -49 + 14 = -35$$

公式(7)也給了我們一個新的想法，對任何$an^2 + bn$而言，我們都可以說

$$an^2 + bn = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\frac{d}{2} = a \quad \therefore d = 2a$$

$$\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) = b \quad \therefore\ a_1 = \frac{d}{2} + b = a + b$$

也就是說，任何一個$an^2 + bn$都對應一個等差級數

$d = 2a$，$a_1 = a + b$ ………………………………………………(10)

(20)　$an^2 + bn = n^2$

$a = 1$，$b = 0$
$\therefore\ d = 2a = 2$
$a_1 = a + b = 1$

等差級數是 1，3，5，7，9，11，13
同學們可以自行驗證$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2$

（21）　$an^2 + bn = -n^2 + 2n$

$a = -1$，$b = 2$

$d = 2a = -2$
$a_1 = a + b = -1 + 2 = 1$

等差級數是 1，-1，-3，-5，-7，-9，-11

同學們可以自行驗證$\sum_{i=1}^{n} a_i = -n^2 + 2n$