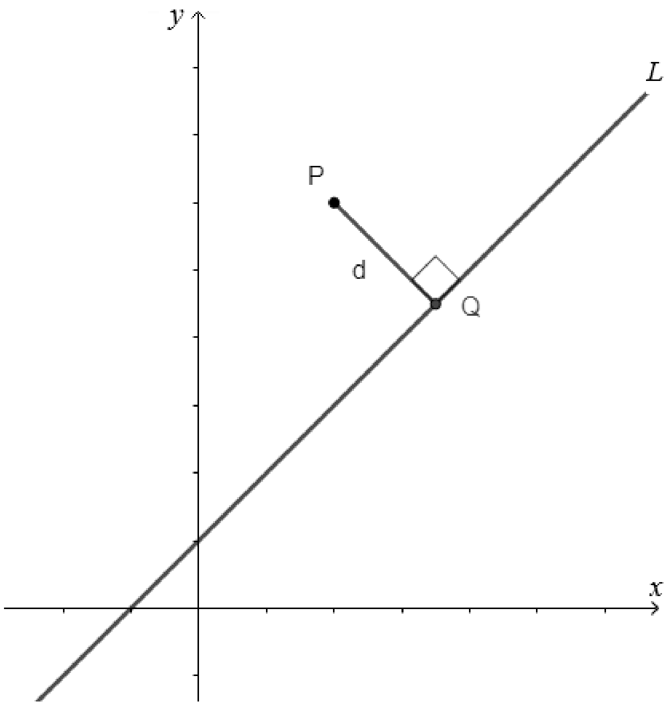
(39)點與線的距離

請看下圖



上圖中，有一點 P 與一直線 L。在 L 上取一點 Q，使得 $\overline{PQ} \perp L$。$\overline{PQ}$ 的長度 d 就是 P 點到直線 L 的距離。

在一般教科書中，L 的方程式是 $ax+by+c=0$

假設 P 點的坐標(x_0,y_0)，則 P 點到直線 L 的距離 d 是：

$$d = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \text{......(39.1)}$$

而我們所使用的直線方程式是 $y=ax+b$

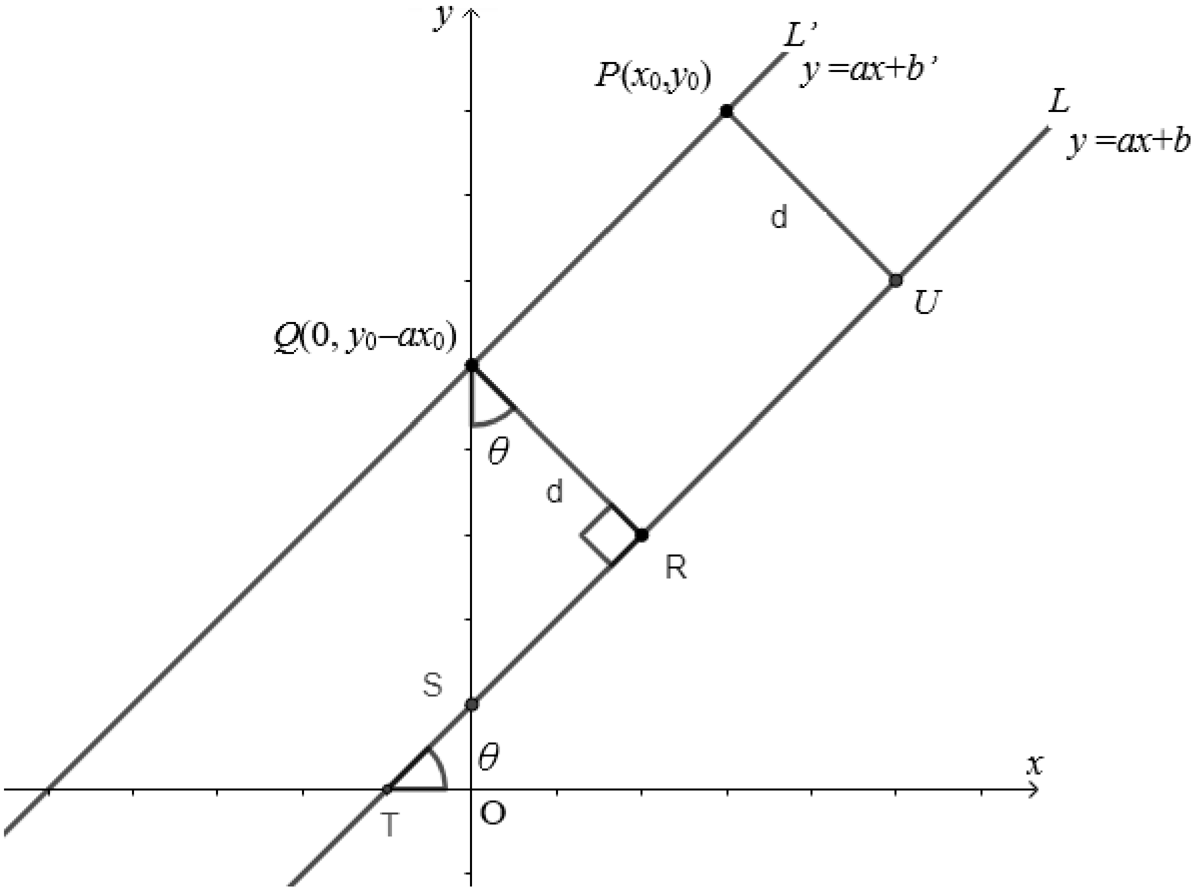
如果使用這個方程式，則 P 點到直線 L 的距離 d 是：

$$d = \left|\frac{y_0 - ax_0 - b}{\sqrt{1 + a^2}}\right| \text{......(39.2)}$$

以下我們用三種不同的方法來導出(39.2)

方法(1)：幾何法

請看下圖



我們先作一條通過 $P=(x_0,y_0)$且與 $y=ax+b$ 平行的直線 L'

因為 L'與 $y=ax+b$ 平行，我們可以設 L'的直線方程式為 $y=ax+b'$

因為 $P=(x_0,y_0)$在 L'上，所以

$y_0=ax_0+b'$

$\rightarrow$ $b'=y_0-ax_0$

L'的直線方程式是 $y=ax+(y_0-ax_0)$……(39.3)

L'與 y 軸交於 Q 點，$Q=(0, y_0-ax_0)$

L 與 y 軸交於 S 點，$S=(0, b)$

$\overline{QS} = y_0 - ax_0 - b$

過 Q 作一直線與 L 垂直，此直線與 L 交於 R 點，則 $\overline{QR}$ 就是 P 與 L 的距離，因為 $L'//L$，而且 $\overline{QR}//\overline{PU}$ 。

$\triangle QSR$ 和 $\triangle TSO$ 相似，因此 $\angle SQR=\angle STO=\theta$

$\triangle QSR$ 中，$\overline{QR}=\overline{QS}\cos\theta=(y_0-ax_0-b)\cos\theta$ ……(39.4)

$tan\,\theta=a$

$\therefore 1+\tan^2\theta=1+a^2=\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$......(39.5)

代(39.5)到(39.4)，得

$\overline{QR}=(y_0-ax_0-b)\cos\theta=\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}$

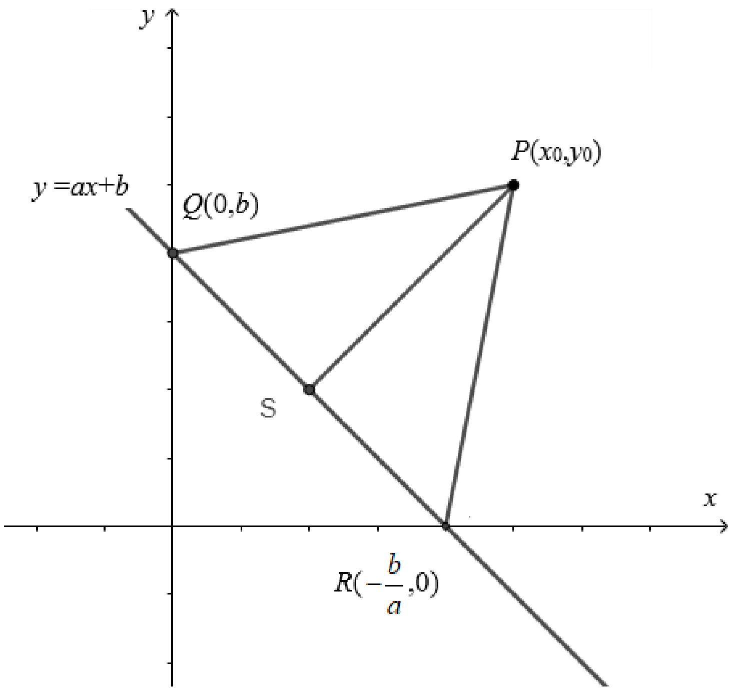
因為 y_0-ax_0-b 之值可能為負，求距離 d 時我們應該取絕對值

$d=\overline{QR}=\left|\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$

因此我們導出了(39.2)

方法(2)：三角形面積法

請看下圖



$y=ax+b$ 與 y 軸和 x 軸分別交於 Q、R 兩點，其中 $Q=(0,b)$，$R=(-\frac{b}{a},0)$

△PQR 的三頂點分別是：

$P(x_0,y_0)$、$Q(0,b)$、$R(-\frac{b}{a},0)$

如果三角形三點為(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)，則面積為

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

代入 P、Q、R 三點

$$\frac{1}{2}\left|x_0(b-0)+0(-\frac{b}{a}-y_0)+(-\frac{b}{a})(y_0-b)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|bx_0-\frac{b}{a}y_0+\frac{b^2}{a}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|(-\frac{b}{a})(y_0-ax_0-b)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}(y_0-ax_0-b)\right|$$

根據畢式定理，$\overline{QR}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+b^2}=\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$

又△PQR 的面積是 $\frac{1}{2}\overline{PS}\times\overline{QR}$ ，所以可以列出：

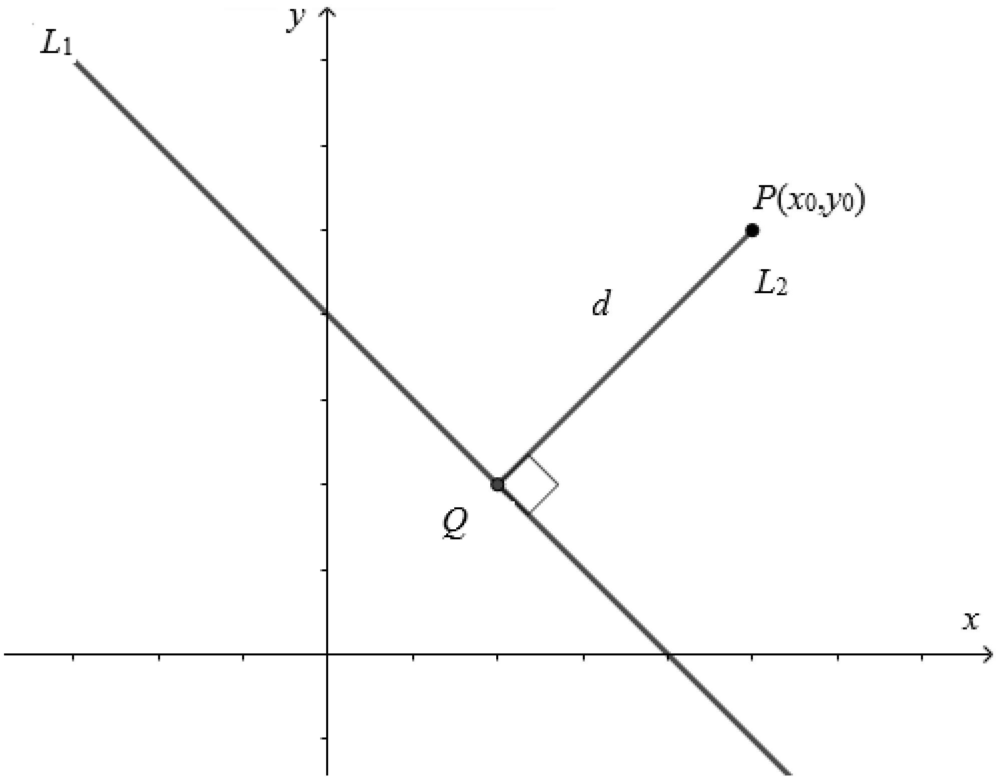
$$\frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}(y_0-ax_0-b)\right|=\frac{1}{2}\overline{PS}\times\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$$

$$\overline{PS}=\left|\frac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$$

$\overline{PS}$ 就是 P 點到直線 L 的距離

方法(3)：向量法

請看下圖



如上圖，L_2 是通過 P 且與 L_1 垂直的直線，L_1 與 L_2 相交於 Q，因此 $\overline{PQ}=d$ 是 P 點到 L_1 的距離。

L_1 的方程式是 $y=ax+b$

其中 a 是 L_1 的斜率。因為 L_2 與 L_1 垂直，所以 L_2 的斜率是 $-\dfrac{1}{a}$。

L_2 的方程式可以寫成是 $y=-\dfrac{1}{a}x+c$

因為 $P(x_0,y_0)$在 L_2 上，所以

$$y_0=-\frac{1}{a}x_0+c$$

$$c=y_0+\frac{1}{a}x_0$$

所以 L_2 的方程式可以寫成 $y=-\dfrac{1}{a}x+y_0+\dfrac{1}{a}x_0$

我們現在有聯立方程式：

$$\begin{cases} y = ax + b ......(39.6) \\ y = -\dfrac{1}{a}x + y_0 + \dfrac{1}{a}x_0 ......(39.7) \end{cases}$$

將(39.6)代入(39.7)，得

$$ax+b = -\frac{1}{a}x + y_0 + \frac{1}{a}x_0$$

$$ax + \frac{1}{a}x = y_0 + \frac{1}{a}x_0 - b$$

$$(a + \frac{1}{a})x = y_0 + \frac{1}{a}x_0 - b$$

$$(a^2 + 1)x = ay_0 + x_0 - ab$$

$$x = \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} ......(39.8)$$

$$x - x_0$$

$$= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - x_0$$

$$= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - \frac{(a^2 + 1)x_0}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2 + 1} - \frac{a^2x_0 + x_0}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{ay_0 - a^2x_0 - ab}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{a(y_0 - ax_0 - a)}{a^2 + 1} ......(39.9)$$

將(39.8)代入(39.7)，得

$$
\begin{aligned}
& y \\
&= -\frac{1}{a}\left(\frac{ay_0 + x_0 - ab}{a^2+1}\right) + y_0 + \frac{1}{a}x_0 \\
&= \frac{-y_0 - \frac{1}{a}x_0 + b}{a^2+1} + \frac{(a^2+1)(y_0 + \frac{1}{a}x_0)}{a^2+1} \\
&= \frac{-y_0 - \frac{1}{a}x_0 + b + a^2 y_0 + ax_0 + y_0 + \frac{1}{a}x_0}{a^2+1} \\
&= \frac{a^2 y_0 + ax_0 + b}{a^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y - y_0 \\
&= \frac{a^2 y_0 + ax_0 + b}{a^2+1} - y_0 \\
&= \frac{a^2 y_0 + ax_0 + b}{a^2+1} - \frac{(a^2+1)y_0}{a^2+1} \\
&= \frac{a^2 y_0 + ax_0 + b - a^2 y_0 - y_0}{a^2+1} \\
&= \frac{-(y_0 - ax_0 - b)}{a^2+1} \text{......(39.10)}
\end{aligned}
$$

根據畢式定理 $\overline{PQ}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

將(39.9)和(39.10)代入

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}
&=\sqrt{\left(\frac{a(y_0-ax_0-b)}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{-(y_0-ax_0-b)}{a^2+1}\right)^2}\\
&=\sqrt{\frac{a^2(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}+\frac{(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{a^2(y_0-ax_0-b)^2+(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(a^2+1)(y_0-ax_0-b)^2}{(a^2+1)^2}}\\
&=\sqrt{\frac{(y_0-ax_0-b)^2}{a^2+1}}\\
&=\left|\frac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{a^2+1}}\right|
\end{aligned}
$$

我們證明了 P 點到直線 L_1 的距離

例 1：直角坐標平面上有直線 L：$y=x$ 和一點 $P(0,2)$，試求 P 和 L 的距離。

解答：

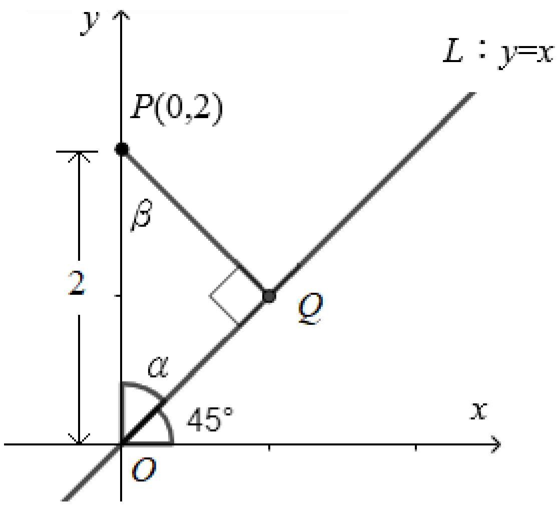
利用公式 $d=\left|\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$

根據題意，$a=1$、$b=0$、$x_0=0$、$y_0=2$

P 和 L 的距離為：

$$\left|\frac{2-1\times 0-0}{\sqrt{1+1^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$
$$=\sqrt{2}$$

我們可以用幾何方式來驗證這公式得到的答案是正確的



我們可以發現 $\alpha=\beta=45^\circ$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{OQ}$

$\overline{PO}^2=\overline{PQ}^2+\overline{OQ}^2=2\overline{PQ}^2$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\overline{PO}^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}2^2}=\sqrt{2}$

例 2：直角坐標平面上有直線 L：$y=-x+1$ 和一點 $P(1,1)$，試求 P 和 L 的距離。

解答：

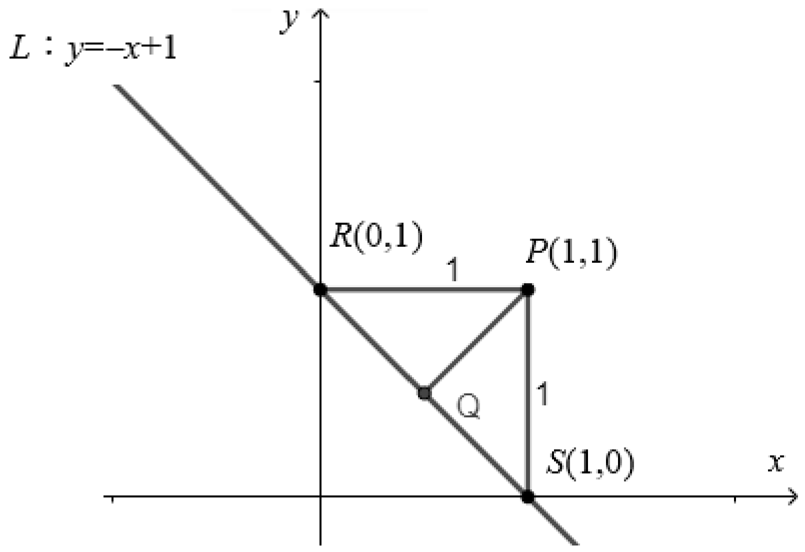
利用公式 $d=\left|\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$

根據題意，$a=-1$、$b=1$、$x_0=1$、$y_0=1$

P 和 L 的距離為：

$$\left|\frac{1-(-1\times1)-1}{\sqrt{1+(-1)^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

我們可以用幾何方式來驗證這公式得到的答案是正確的



$\triangle PRS$ 是一個等腰三角形，，所以 $\overline{PQ}$ 平分 $\overline{RS}$

$\therefore Q$ 的坐標為$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 3：直角坐標平面上有直線 L：$y=-3x+5$ 和一點 $P(2,5)$，試求 P 和 L 的距離。

解答：

利用公式 $d=\left|\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$

根據題意，$a=-3$、$b=5$、$x_0=2$、$y_0=5$

P 和 L 的距離為：

$$\left|\frac{5-(-3)\times 2-5}{\sqrt{1+(-3)^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{6}{\sqrt{10}}\right|$$
$$=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

例 4：直角坐標平面上有直線 L：$y=3$ 和一點 $P(2,6)$，試求 P 和 L 的距離。

解答：

利用公式 $d=\left|\dfrac{y_0-ax_0-b}{\sqrt{1+a^2}}\right|$

根據題意，$a=0$、$b=3$、$x_0=2$、$y_0=6$

P 和 L 的距離為：

$$\left|\frac{6-0\times 2-3}{\sqrt{1+0^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{3}{\sqrt{1}}\right|$$
$$=3$$

同學們可以很容易地看出這個答案是正確的

例 5：直角坐標平面上有直線 L：$x=3$ 和一點 $P(5,2)$，試求 P 和 L 的距離。

解答：

這次我們換一個公式

當 L 的方程式是 $ax+by+c=0$，P 點的坐標是 (x_0,y_0)，則 P 點到直線 L 的距離 d 是：

$$d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$x=3$ 可以寫成 $x+0y-3=0$

所以 $a=1$、$b=0$、$c=-3$、$x_0=5$、$y_0=2$

P 和 L 的距離為：

$$\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{1\times5+0\times2+(-3)}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|$$
$$=\left|\frac{5-3}{\sqrt{1^2}}\right|$$
$$=2$$

同學們可以很容易地看出這個答案是正確的