(03) 直角坐標

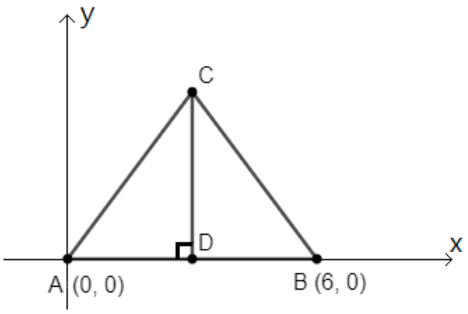
一、直角坐標應用

1. 直角坐標上，P 點坐標為(1, 3)，Q 點坐標為(2, 5)，則兩點距離為？

解：

$\sqrt{(1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

2. 如下圖，$\triangle ABC$是等腰三角形，$\overline{AC}=\overline{BC}=5$，求 C點坐標。



解：

D 為$\overline{AB}$中點，△ADC 是直角三角形，故

$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2$

$5^2=\overline{CD}^2+(\frac{6}{2})^2$

$25=\overline{CD}^2+3^2$

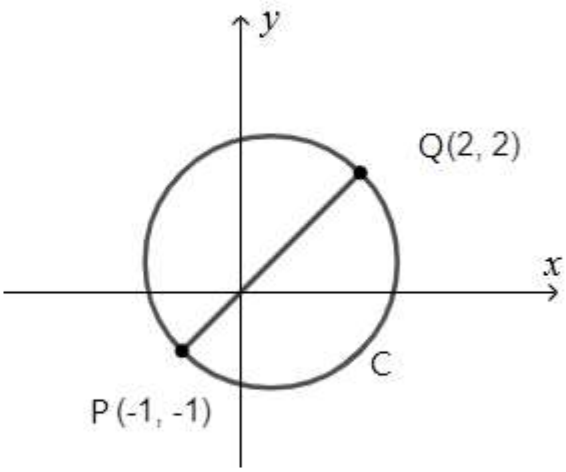
$\overline{CD}^2=25-9$

$\overline{CD}^2=16$

$\overline{CD}=$ 4(負不合)

故 C 點坐標是(3, 4)

3. 如下圖，$\overline{PQ}$是圓 C 的直徑，P 點坐標為$(-1,-1)$，Q 點坐標為$(2,2)$，求圓 C 的半徑。



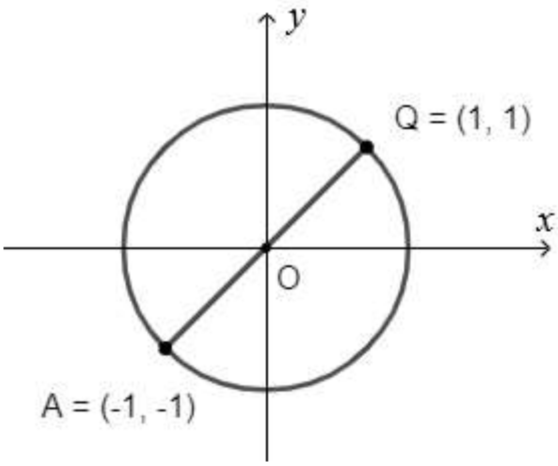
解：

$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

圓 C 的半徑＝$3\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

4. 如下圖，$\overline{AQ}$是圓 O 的直徑，A 點坐標為$(-1,-1)$，Q 點坐標為(1, 1)，

求圓心 O 的坐標。

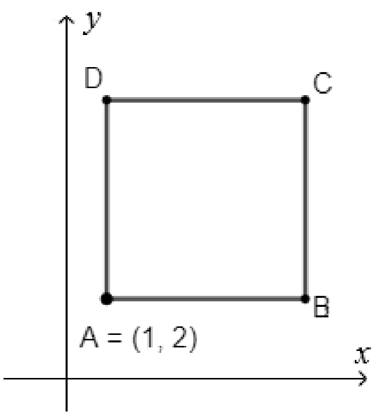


解：

O 點的 x 坐標：$O_x = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$，O 點的 y 坐標：$O_y = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

圓心 O 的坐標是(0, 0)

5. 如下圖，ABCD 是邊長為 5 的正方形，A 點坐標是(1,2)，求 B、C、D 點的坐標。



解：

B 點坐標：(1＋5,2)＝(6,2)

C 點坐標：(1＋5,2＋5)＝(6,7)

D 點坐標：(1,2＋5)＝(1,7)

6. 接續 5.，求

(1) 通過 A、B 的直線方程式。(2) 通過 A、D 的直線方程式。

(3) 通過 B、C 的直線方程式。(4) 通過 B、D 的直線方程式。

解：

(1) 通過 A、B 的直線方程式是 $y=2$。

(2) 通過 A、D 的直線方程式是 $x=1$。

(3) $\overline{CD}//\overline{AB}$，通過 C、D 的直線方程式是 $y=7$。

(4) 設通過 B、D 的直線方程式為 $y=ax+b$。

將 B、D 坐標代入得聯立方程式

$\begin{cases} 7=a+b \\ 2=6a+b \end{cases}$，解得 $a=-1$，$b=8$

通過 B、D 的直線方程式是 $y=-x+8$

7. 接續 5.，求通過 A、C 的直線方程式。

解：

設通過 A、C 的直線方程式為 $y=ax+b$。

將 A、C 坐標代入得聯立方程式

$\begin{cases} 2=a+b \\ 7=6a+b \end{cases}$，解得 $a=1$，$b=1$

通過 A、C 的直線方程式是 $y=x+1$

8. 接續 5.，正方形 ABCD 的對角線交點坐標。

解：

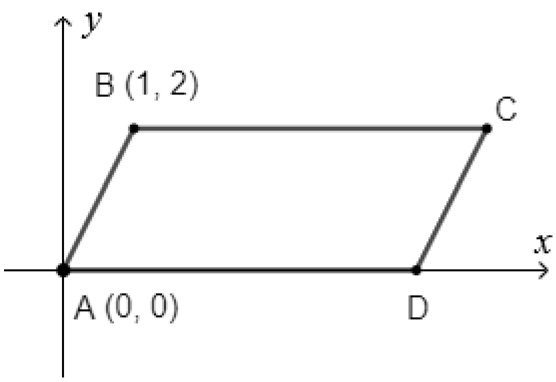
通過 B、D 的對角線直線方程式：$y=\quad x+8$

通過 A、C 的對角線直線方程式：$y=x+1$

解聯立方程式 $\begin{cases} y=-x+8 \\ y=x+1 \end{cases}$，解得 $x=\frac{7}{2}$，$y=\frac{9}{2}$

對角線交點坐標是 $(\frac{7}{2},\frac{9}{2})$

9. 如下圖， ABCD 是平行四邊形，$\overline{AD}$＝5，$\overline{AD}$平行 x 軸，求 C、D 點之坐標。



解：

依題意$\overline{BC}$＝$\overline{AD}$＝5，$\overline{AD}//\overline{BC}$

C 點坐標＝(1＋5, 2)＝(6, 2)

D 點坐標＝(0＋5, 0)＝(5, 0)

10. 接續 9.，求通過 C、D 的直線方程式。

解：

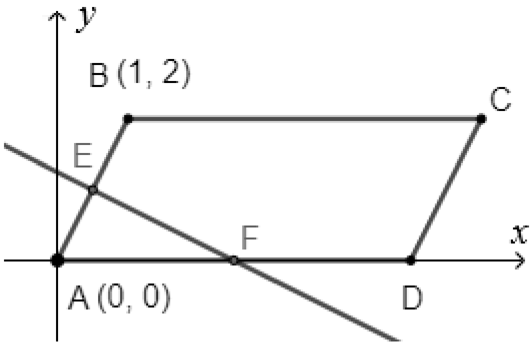
設通過 C、D 的直線方程式為$y = ax + b$。

將 C、D 坐標代入得聯立方程式

$\begin{cases} 2 = 6a + b \\ 0 = 5a + b \end{cases}$，解得$a$＝2，$b$＝$-10$

通過 C、D 的直線方程式是y＝$2x - 10$

11. 接續 9.，E 為 A、B 之中點，F 為 A、D 之中點，求通過 E、F 的直線方程式。



解：

E 點坐標＝$(\frac{0+1}{2},\frac{0+2}{2})=(\frac{1}{2},1)$

F 點坐標＝$(\frac{0+5}{2},\frac{0+0}{2})=(\frac{5}{2},0)$

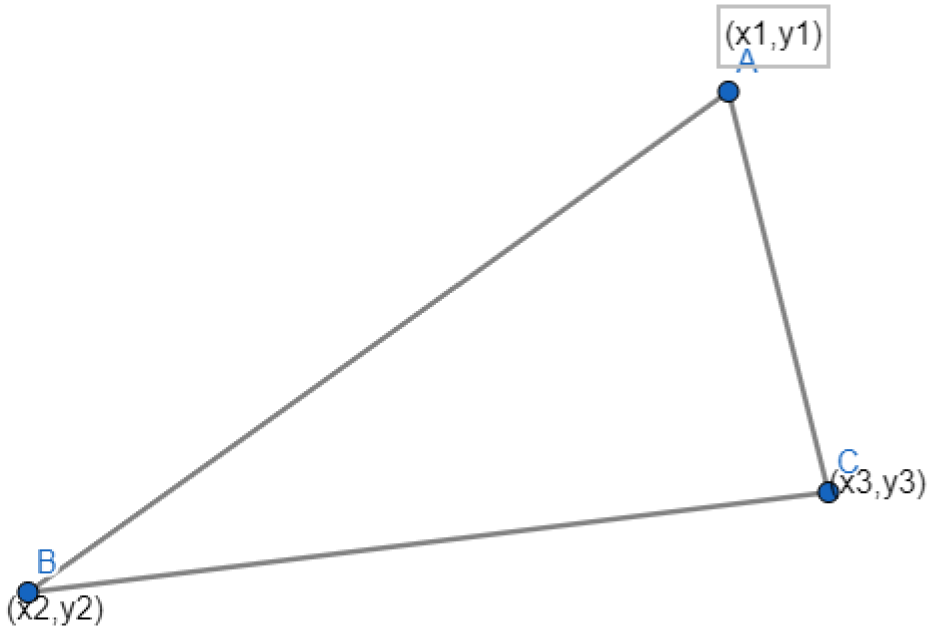
設通過 E、F 的直線方程式為 $y=ax+b$。

將 E、F 坐標代入得聯立方程式

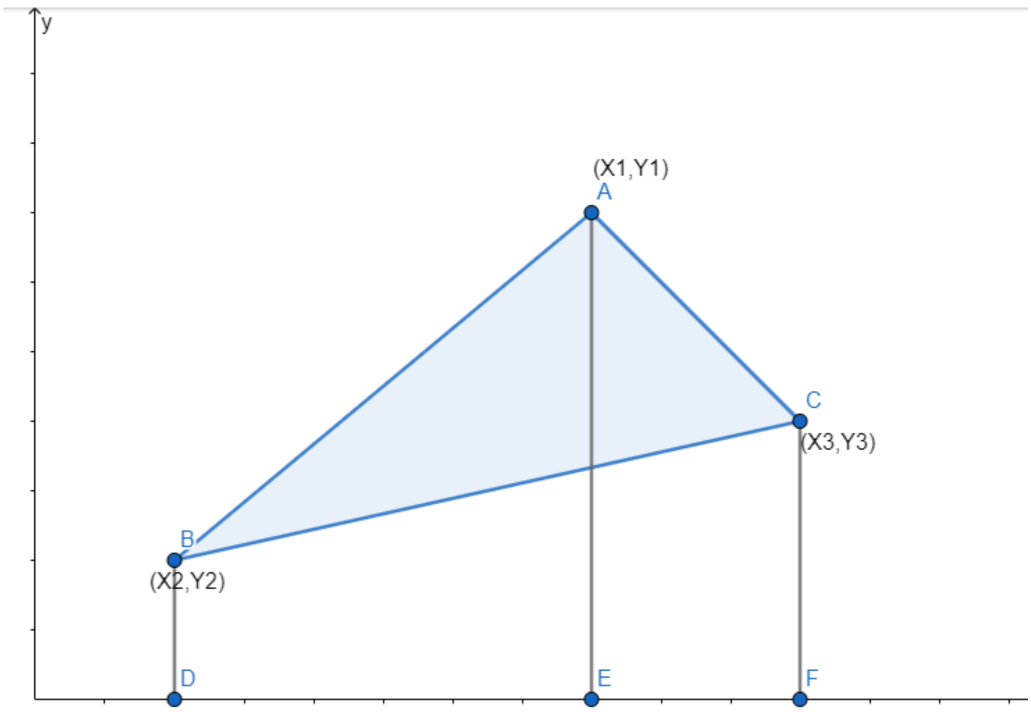
$\begin{cases}1=\frac{1}{2}a+b\\0=\frac{5}{2}a+b\end{cases}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{5}{4}$

通過 E、F 的直線方程式是$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

12. 已知三角形端點的座標，求三角形面積請看下圖；



ΔABC各端點的座標已知了，我們要求這三角形的面積



ΔABC=四邊形 ABDE+四邊形 ACFE−四邊形 BDFC--------------------(1)

四邊形 ABDE=$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{AE}})\times\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)$-------------(2)

四邊形 ACFE=$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AE}}+\overline{\mathrm{CF}})\times\overline{\mathrm{EF}}=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)$-------------(3)

四邊形 BDFC$= \frac{1}{2}\ (\overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{CF}}) \times \overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{2}\ (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$------------- (4)

將(2),(3),(4)代入(1)得

$\Delta ABC = \frac{1}{2}\ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$-----------------(5)

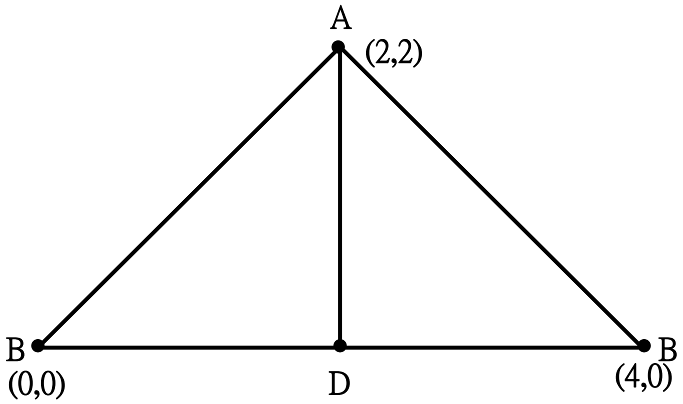
因為當坐標未知時無法判斷其值大小，求出的答案可能為負，故面積需取絕對值。

(1) $\mathrm{A} = (2,2)\ ,\mathrm{B} = (0,0)\ ,\mathrm{C} = (4,0)$

$x_1 = 2$ 、$y_1 = 2$

$x_2 = 0$、$y_2 = 0$

$x_3 = 4$ 、$y_3 = 0$



$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\ |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{1}{2}\ |0(0 - 0) + 0(0 - 2) + 4(2 - 0)|$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 \times 2) = 4$$

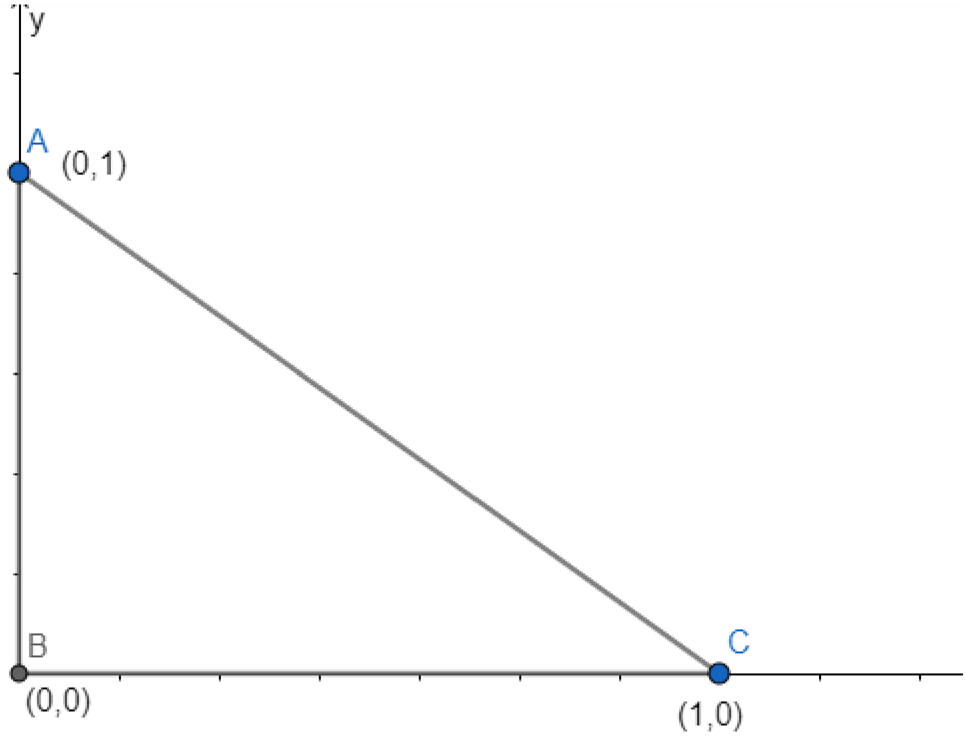
我們也可以用幾何方法證明這個答案是對的，因為$\Delta ABC = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

（2） $\mathrm{A}=(0,1)$, $\mathrm{B}=(0,0)$, $\mathrm{C}=(1,0)$

$x_1=0$、$y_1=1$

$x_2=0$、$y_2=0$

$x_3=1$ 、$y_3=0$



$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|=\frac{1}{2}\left|0(0-0)+0(0-1)+1(1-0)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

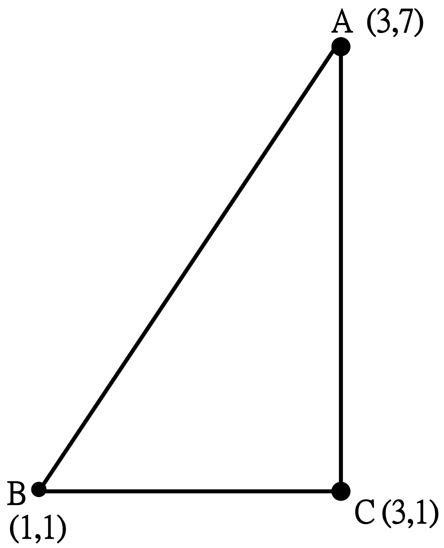
這個答案也可以用幾何得到 $\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

（3） $\mathrm{A}=(3,7)$, $\mathrm{B}=(1,1)$, $\mathrm{C}=(3,1)$

$x_1=3$、$y_1=7$

$x_2=1$、$y_2=1$

$x_3=3$ 、$y_3=1$



$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| = \frac{1}{2}\left|1(1-7) + 3(7-1) + 3(1-1)\right|$$

$$= \frac{1}{2} \times (-6+18) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

如用幾何得

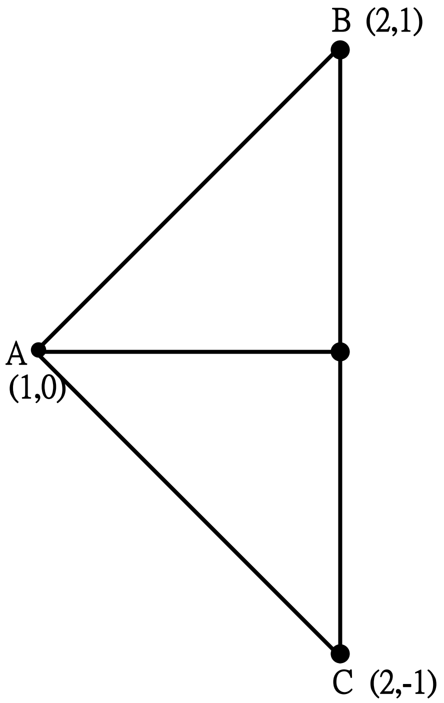
$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{AC}} = \frac{1}{2} \times (7-1) \times (3-1) = \frac{1}{2} \times (6 \times 2) = 6$$

（4） $\mathrm{A} = (1{,}0)$, $\mathrm{B} = (2{,}1)$, $\mathrm{C} = (2,-1)$

$x_1 = 1$、$y_1 = 0$

$x_2 = 2$、$y_2 = 1$

$x_3 = 2$ 、$y_3 = -1$



$ABC = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$= \frac{1}{2}\,|1(1-(-1)) + 2(-1-0) + (2)(0-1))| = \frac{1}{2}\,|(2-2-2)| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

如用幾何得

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ 過 A 的高 $\times \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$