（02）根式運算

一、基本運算規則

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

解 $=\sqrt{2\times 3}$

$=\sqrt{6}$

2. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$

解 $=\sqrt{2\times 5}$

$=\sqrt{10}$

3. $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

解 $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=\sqrt{2\times 3}+\sqrt{2\times 2}$

$=\sqrt{6}+2$

4. $\sqrt{3}\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

解 $\sqrt{3}\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$=\sqrt{3\times 5}-\sqrt{3\times 2}$

$=\sqrt{15}-\sqrt{6}$

5. $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

解 $=\sqrt{2\times 3}+\sqrt{2\times 6}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{12}$

6. $\sqrt{5}\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

解 $=\sqrt{5\times 2}-\sqrt{5\times 3}$

$=\sqrt{10}-\sqrt{15}$

二、利用乘法公式乘開根式

7. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

解 $=\sqrt{6\times3}+\sqrt{6\times5}$

$+\sqrt{2\times3}+\sqrt{2\times5}$

$=\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{6}+\sqrt{10}$

8. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

解 $=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2$

$=1$

9. $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

解 $=(\sqrt{3})^2-(1)^2$

$=3-1$

$=2$

10. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

解 $=(\sqrt{2})^2-(1)^2$

$=2-1$

$=1$

11. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

解 $=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=5-3$

$=2$

三、提出整數

12. $\sqrt{12}$

解 $=\sqrt{4\times 3}$

$=\sqrt{2^2\times 3}$

$=2\sqrt{3}$

13. $\sqrt{32}$

解 $=\sqrt{16\times 2}$

$=\sqrt{4^2\times 2}$

$=4\sqrt{2}$

14. $\sqrt{45}$

解 $=\sqrt{9\times 5}$

$=\sqrt{3^2\times 5}$

$=3\sqrt{5}$

15. $\sqrt{50}$

解 $=\sqrt{25\times 2}$

$=\sqrt{5^2\times 2}$

$=5\sqrt{2}$

16. $\sqrt{96}$

解 $=\sqrt{16\times 6}$

$=\sqrt{4^2\times 6}$

$=4\sqrt{6}$

17. $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$

解 $=\sqrt{12}$

$=\sqrt{4\times 3}$

$=\sqrt{2^2\times 3}$

$=2\sqrt{3}$

18. $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

$= \sqrt{18}$

$= \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{3^2 \times 2}$

$= 3\sqrt{2}$

19. $\sqrt{2} \times \sqrt{12}$

$= \sqrt{24}$

$= \sqrt{4 \times 6}$

$= \sqrt{2^2 \times 6}$

$= 2\sqrt{6}$

四、根式有理化

20. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

解 $=\dfrac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$=\sqrt{2}-1$

21. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

解 $=\dfrac{2\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

22. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

解 $=\dfrac{2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{2\sqrt{12}-2\times2}{6-2}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{4}$

$=\sqrt{3}-1$

23. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

解 $=\dfrac{3\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-3\times2}{3-2}$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-6}{1}$

$=3(\sqrt{6}-2)$

五、利用乘法公式乘開根式(2)

24. $(1+\sqrt{2})^2$

解 $=1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=1+2\sqrt{2}+2$

$=3+2\sqrt{2}$

25. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

解 $=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$=3-2\sqrt{6}+2$

$=5-2\sqrt{6}$

六、根式應用

26. 已知 $a^2=4$，求 a。

解　$a^2=4$，$a=\pm\sqrt{4}=\pm2$

27. 已知 $a^2=9$，求 a。

解　$a^2=9$，$a=\pm\sqrt{9}=\pm3$

28. 已知 $a^2=20$，求 a。

解　$a^2=20$，$a=\pm\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}$

29. 已知 $a^2=12$，求 a。

解　$a^2=12$，$a=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

30. 已知 $a^2=18$，求 a。

解　$a^2=18$，$a=\pm\sqrt{18}=\pm3\sqrt{2}$

31. $a\sqrt{2}+b\sqrt{8}+3b=5\sqrt{2}+6$，求 a、b。

解

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{8}+3b$$
$$=a\sqrt{2}+2b\sqrt{2}+3b$$
$$=(a+2b)\sqrt{2}+3b$$
$$=5\sqrt{2}+6$$

$\therefore 3b=6$，$b=2$

$a+2b=5$，$a+2\times2=5$，$a=1$

答案：$a=1$、$b=2$

32. $(3+\sqrt{3})a+4(1+2\sqrt{3}b)=7+9\sqrt{3}$，求 a、b。

解

$(3+\sqrt{3})a+4(1+2\sqrt{3}b)$

$=3a+\sqrt{3}a+4+8\sqrt{3}b$

$=3a+4+(a+8b)\sqrt{3}$

$=7+9\sqrt{3}$

$\therefore 3a+4=7$，$a=1$

代入 $a+8b=9$

$1+8b=9$，$b=1$

答案：$a=1$、$b=1$

33. $a\sqrt{2}+2b\sqrt{2}+a+b=8\sqrt{2}+5$，求 a、b。

解

$a\sqrt{2}+2b\sqrt{2}+a+b$

$=(a+2b)\sqrt{2}+a+b$

$=8\sqrt{2}+5$

$\therefore \begin{cases} a+2b=8 \\ a+b=5 \end{cases}$

解得 $a=2$、$b=3$

答案：$a=2$、$b=3$

七、根號比大小

34. $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$比大小

解　因為$2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$都是正數，可以將兩數平方比較大小：

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$$

又 12<18

$$\therefore 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

35. $\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$比大小

解　因為$\sqrt{5}, 2\sqrt{2}$都是正數，可以將兩數平方比較大小：

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

$$(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$$

又 5<8

$$\therefore \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$$

36. $4\sqrt{5}, 2\sqrt{21}$比大小

解　因為$4\sqrt{5}, 2\sqrt{21}$都是正數，可以將兩數平方比較大小：

$$(4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$

$$(2\sqrt{21})^2 = 4 \times 21 = 84$$

又 80<84

$$\therefore 4\sqrt{5} < 2\sqrt{21}$$

37. $6\sqrt{2}, 9$比大小

解　因為$6\sqrt{2}, 9$都是正數，可以將兩數平方比較大小：

$$(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$$

$$(9)^2 = 81$$

又 72<81

$$\therefore 6\sqrt{2} < 9$$

38. $\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{4}$比大小

解　通分變成：$\frac{4\sqrt{2}}{12},\frac{15}{12}$

因為$\frac{4\sqrt{2}}{12},\frac{15}{12}$都是正數且分母相同，

可以將分子平方比較大小：

$$(4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

$$(15)^2 = 225$$

得到 32<225

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{5}{4}$$

39. $\frac{5\sqrt{2}}{4},\frac{2\sqrt{7}}{3}$比大小

解　通分變成：$\frac{15\sqrt{2}}{12},\frac{8\sqrt{7}}{12}$

因為$\frac{15\sqrt{2}}{12},\frac{8\sqrt{7}}{12}$都是正數且分母相同，可以將分子平方比較大小：

$$(15\sqrt{2})^2 = 225 \times 2 = 450$$

$$(8\sqrt{7})^2 = 64 \times 7 = 448$$

得到 450>448

$$\therefore \frac{5\sqrt{2}}{4} > \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

40. $\frac{2\sqrt{3}}{5},\frac{\sqrt{2}}{3}$比大小

解　通分變成：$\frac{6\sqrt{3}}{15},\frac{5\sqrt{2}}{15}$

因為$\frac{6\sqrt{3}}{15},\frac{5\sqrt{2}}{15}$都是正數且分母相同，

可以將分子平方比較大小：

$$(6\sqrt{3})^2 = 36 \times 3 = 108$$

$$(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$$

108>50

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{5} > \frac{\sqrt{2}}{3}$$