(1) 符號運算

數學符號運算

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

解 $=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}$

$=\frac{a+b}{ab}$

2. $\frac{1}{2a}-\frac{2}{3b}$

解 $=\frac{3b}{6ab}-\frac{4a}{6ab}$

$=\frac{3b-4a}{6ab}$

3. $\frac{3}{4a}-\frac{1}{6b}$

解 $=\frac{9b}{12ab}-\frac{2a}{12ab}$

$=\frac{9b-2a}{12ab}$

4. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}$

解 $=\frac{c}{abc}+\frac{ab}{abc}$

$=\frac{c+ab}{abc}$

5. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

解 $=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$

$=\frac{ad+bc}{bd}$

6. $a+\frac{1}{a}$

解 $=\frac{a^2}{a}+\frac{1}{a}$

$=\frac{a^2+1}{a}$

7. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}$

解 $=\dfrac{a}{a^2}+\dfrac{2}{a^2}$

$=\dfrac{a+2}{a^2}$

8. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$

解 $=\dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\dfrac{a+b}{(a-b)(a+b)}$

$=\dfrac{(a-b)+(a+b)}{a^2-b^2}$

$=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

解 $=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

$=\dfrac{-2\sqrt{b}}{a-b}$

10. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

解 $=\dfrac{b^2}{a^2b^2}+\dfrac{a^2}{a^2b^2}$

$=\dfrac{b^2+a^2}{a^2b^2}$

11. $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$

解 $=\dfrac{b^2}{a^2b^2}-\dfrac{a^2}{a^2b^2}$

$=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}$

$=\dfrac{(b+a)(b-a)}{a^2b^2}$

12. $\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}$

解 $=\dfrac{1}{ab}$

13. $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{1}{a^2}$

解 $=\dfrac{1}{ab}$

14. $\dfrac{1}{a}\div\dfrac{1}{b}$

解 $=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{b}{1}$

$=\dfrac{b}{a}$

15. $\dfrac{a^2}{\dfrac{a}{b}}$

解 $= a^2 \div \dfrac{a}{b}$

$= a^2 \times \dfrac{b}{a}$

$= ab$

16. $\dfrac{ab}{c} \times \dfrac{2}{b}$

解 $= \dfrac{2a}{c}$

17. $(a^2 - b^2) \times \dfrac{1}{a-b}$

解 $= \dfrac{(a+b)(a-b)}{a-b}$

$= a + b$

18. $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$

解 $= \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$

$= \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

$= \dfrac{ad}{bc}$

19. $\dfrac{a^2}{\dfrac{b^2}{a^2}}$

解 $= a^2 \div \dfrac{b^2}{a^2}$

$= a^2 \times \dfrac{a^2}{b^2}$

$= \dfrac{a^4}{b^2}$

20. $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$

解 $= \dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)}$

$= \dfrac{1}{a+b}$

21. $(-a)+b+3a-2b$

解
$$=(-a+3a)+(b-2b)$$
$$=2a-b$$

22. $-a(a+b)$

解
$$=-a^2+ab$$

23. $a(a-b)-2a(a+b)$

解
$$=a^2-ab-2a^2-2ab$$
$$=(a^2-2a^2)-ab-2ab$$
$$=(-a^2)-3ab$$

24. $a(a+b)-c(d-a)$

解
$$=a^2+ab-cd+ca$$

25. $(a+b)(c+d)$

解
$$=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

26. $3a(c+d)-4c(a-d)$

解
$$=3ac+3ad-4ac+4cd$$
$$=(3ac-4ac)+3ad+4cd$$
$$=(-ac)+3ad+4cd$$

27. $3a(a+b)-4a(a-b)$

解
$$=3a^2+3ab-4a^2+4ab$$
$$=(3a^2-4a^2)+(3ab+4ab)$$
$$=(-a^2)+7ab$$

28. $a(a+2b)-2a(2a-b)$

解
$$=a^2+2ab-4a^2+2ab$$
$$=-3a^2+4ab$$

29. $-a(b-c)+b(a-c)$

解
$$\begin{aligned}&=-ab+ac+ab-bc\\&=(-ab+ab)+ac-bc\\&=ac-bc\end{aligned}$$

30. $4a(a+2b)-3a(a-b)$

解
$$\begin{aligned}&=4a^2+8ab-3a^2+3ab\\&=(4a^2-3a^2)+(8ab+3ab)\\&=a^2+11ab\end{aligned}$$

31. $x-a=b$

解 $x=a+b$

32. $3x-a=4x+b$

解
$$\begin{aligned}&3x-4x=a+b\\&-x=a+b\\&x=-(a+b)\end{aligned}$$

33. $\dfrac{x-a}{2x-b}=1$

解
$$\begin{aligned}&x-a=2x-b\\&x-2x=a-b\\&-x=a-b\\&x=-a+b\end{aligned}$$

34. $\dfrac{x}{3a}+a=b$

解
$$\begin{aligned}&\frac{x}{3a}=b-a\\&x=3a(b-a)\end{aligned}$$

35. $\dfrac{2x-a}{x+a}=\dfrac{1}{2}$

解
$$\begin{aligned}&2(2x-a)=x+a\\&4x-2a=x+a\\&4x-x=a+2a\\&3x=3a\\&x=a\end{aligned}$$

36. $2x-b=3a+a$

解
$$\begin{aligned}&2x-3x=a+b\\&-x=a+b\\&x=-(a+b)\end{aligned}$$

37. $\dfrac{x-2a}{x+2a}=\dfrac{2a}{3}$

解
$3(x-2a)=2a(x+2a)$
$3x-6a=2ax+4a^2$
$3x-2ax=4a^2+6a$
$x(3-2a)=4a^2+6a$
$x=\dfrac{4a^2+6a}{3-2a}$

38. $2ax+3=4bx-7$

解
$2ax-4bx=-7-3$
$2x(a-2b)=-10$
$x(a-2b)=-5$
$x=\dfrac{-5}{a-2b}$

39. $4ax+5bx=3$

解
$x(4a+5b)=3$
$x=\dfrac{3}{4a+5b}$

40. $ax+b=cx+d$

解
$ax-cx=d-b$
$x(a-c)=d-b$
$x=\dfrac{d-b}{a-c}$

41. 解聯立方程式

$\begin{cases} ax+by=c\ldots(1) \\ x-y=d\ldots\ldots(2) \end{cases}$

解
$(2)\times a \quad ax-ay=ad\ldots(3)$
$(1)-(3) \quad (b+a)y=c-ad$
$\therefore y=\dfrac{c-ad}{b+a}$
$(2)\times b \quad bx-by=bd\ldots(4)$
$(1)+(4) \quad (a+b)x=c+bd$
$\therefore x=\dfrac{c+bd}{a+b}$
答：$x=\frac{c+bd}{a+b}, y=\frac{c-ad}{b+a}$

42. 解聯立方程式

$\begin{cases} ax+y=b\ldots(1) \\ ax-y=d\ldots(2) \end{cases}$

解
$(1)+(2) \quad 2ax=b+d$
$\therefore x=\dfrac{b+d}{2a}$
$(1)-(2) \quad 2y=b-d$
$\therefore y=\dfrac{b-d}{2}$
答：$x=\frac{b+d}{2a}, y=\frac{b-d}{2}$

43. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x+ay=b\ldots(1) \\ x-ay=c\ldots(2) \end{cases}$$

解 $(1)+(2)\quad 2x=b+c$

$$\therefore x=\frac{b+c}{2}$$

$(1)-(2)\quad 2ay=b-c$

$$\therefore y=\frac{b-c}{2a}$$

答：$x=\frac{b+c}{2}, y=\frac{b-c}{2a}$

44. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=a\ldots(1) \\ x-y=b\ldots(2) \end{cases}$$

解 $(1)+(2)\quad 2x=a+b$

$$\therefore x=\frac{a+b}{2}$$

$(1)-(2)\quad 2y=a-b$

$$\therefore y=\frac{a-b}{2}$$

答：$x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{a-b}{2}$

45. 解聯立方程式

$$\begin{cases} ax+y=b\ldots(1) \\ x-ay=c\ldots(2) \end{cases}$$

解 $(2)\times a\quad 2a-a^2y=ac\ldots(3)$

$(1)-(3)$

$y+a^2y=b-ac$

$(1+a^2)y=b-ac$

$$\therefore y=\frac{b-ac}{1+a^2}$$

$(1)\times a\quad a^2x+ay=ab\ldots(4)$

$(2)+(4)$

$x+a^2x=c+ab$

$(1+a^2)x=c+ab$

$$\therefore x=\frac{c+ab}{1+a^2}$$

答：$x=\frac{c+ab}{1+a^2}, y=\frac{b-ac}{1+a^2}$

46. 解一元二次方程式

$ax^2+a^2x=0\quad (a\neq 0)$

解 $ax^2+a^2x=0$

$ax(x+a)=0$

$$\begin{cases} ax=0, x=0 \\ x+a=0, x=-a \end{cases}$$

答：$x=0,-a$

47. 解一元二次方程式

$x^2-2ax+a^2=0$

解 $x^2-2ax+a^2=0$

$(x-a)^2=0$

$x=a$(重根)

答：$x=a$ (重根)

48. 解一元二次方程式

$x^2-(a+b)x+ab=0$

解 $x^2-(a+b)x+ab=0$

$(x-a)(x-b)=0$

$x=a,b$

答：$x=a,b$

49. 解一元二次方程式

$abx^2+(a+b)x+1=0$

解 $abx^2+(a+b)x+1=0$

$(ax+1)(bx+1)=0$

$\begin{cases} ax+1=0, x=-\dfrac{1}{a} \\ bx+1=0, x=-\dfrac{1}{b} \end{cases}$

答：$x=-\frac{1}{a},-\frac{1}{b}$

50. 解一元二次方程式

$x^2-4ax+3a^2=0$

解 $x^2-4ax+3a^2=0$

$(x-3a)(x-a)=0$

$\begin{cases} x-3a=0, x=3a \\ x-a=0, x=a \end{cases}$

答：$x=3a,a$