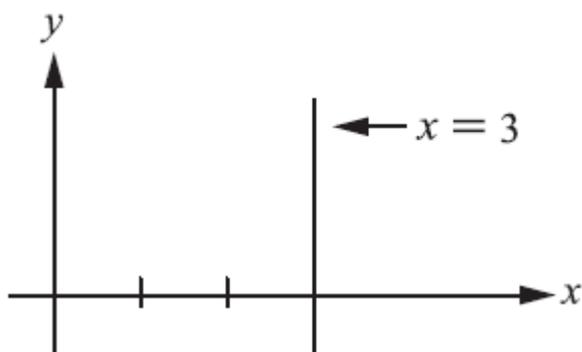
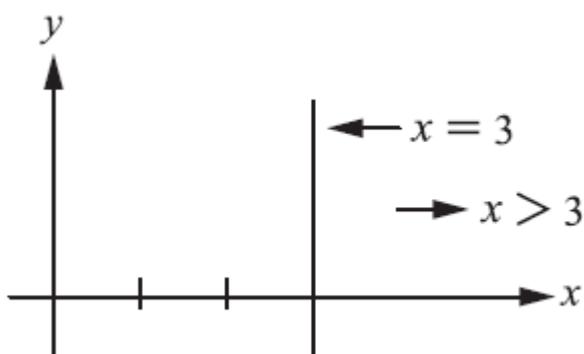


(70)二元一次不等式

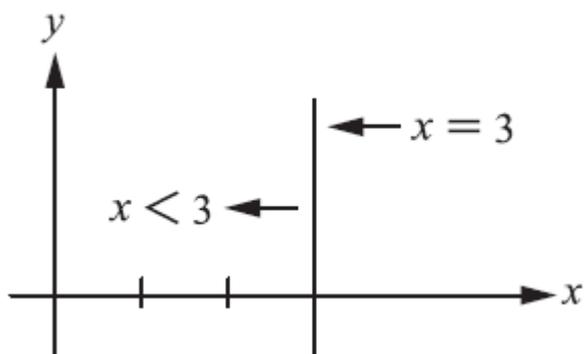
如果我們要問  $x=3$  的點在哪裡，答案是在直線  $x=3$  上面，如下圖所示。



如果我們再問  $x>3$  的點在哪裡，答案是在直線  $x=3$  的右邊，請看下圖：

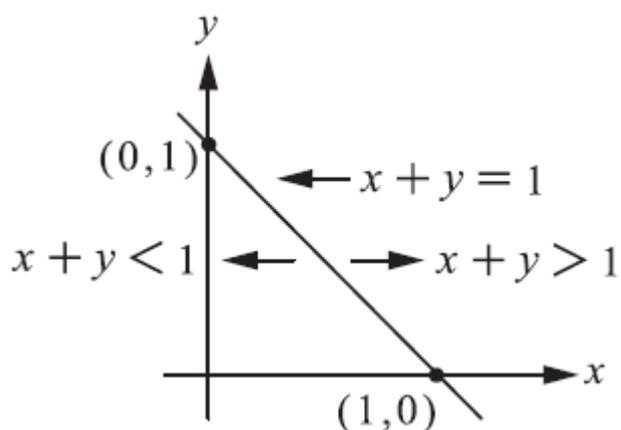


至於  $x<3$  的點在哪裡？答案當然是在直線  $x=3$  的左邊。

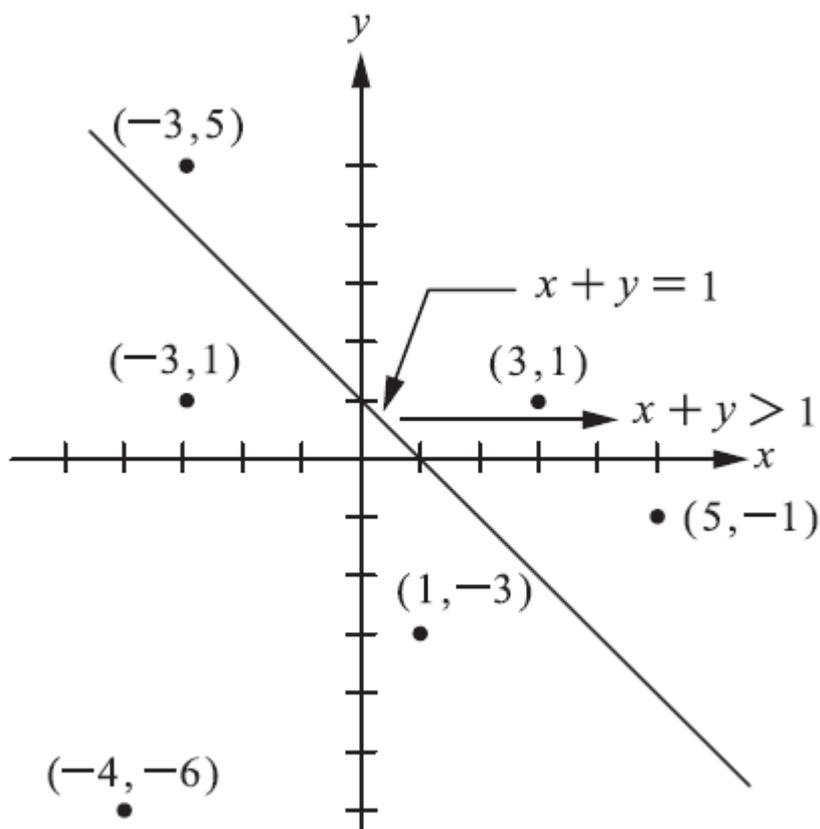


如果我們要問  $x+y>1$  的點在哪裡，我們可以選出一些符合  $x+y>1$  的點，如  $(3, 1)$ 、 $(-3, 5)$ 、 $(5, -1)$  等等。 $x+y<1$  的點有  $(1, -3)$ 、 $(-3, 1)$ 、 $(-4, -6)$  等等。

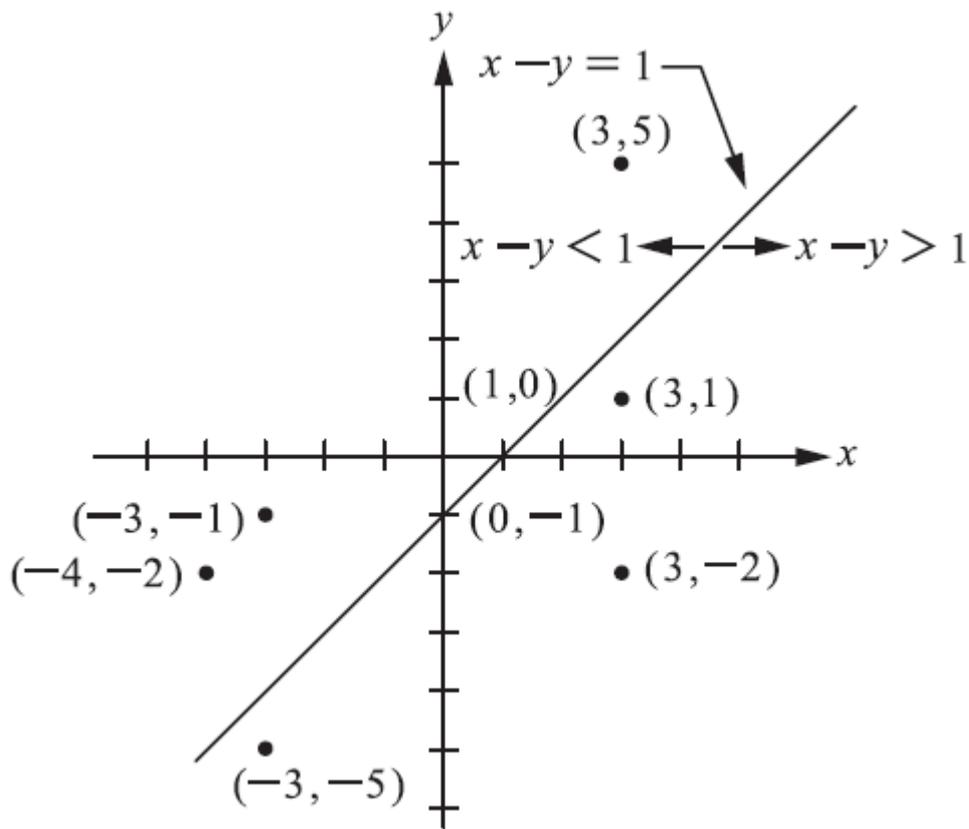
我們的問題是  $x+y>1$  和  $x+y<1$  的點究竟在哪裡，請看下面的圖：



上圖表示， $x+y>1$  的點在直線  $x+y=1$  的右邊， $x+y<1$  的點在直線  $x+y=1$  的左邊，如下圖所示：



現在，我們來尋找  $x-y>1$  和  $x-y<1$  的點。 $x-y>1$  的點有  $(3,1)$ 、 $(3,-2)$ 、 $(-3,-5)$ ， $x-y<1$  的點有  $(3,5)$ 、 $(-3,-1)$  和  $(-4,-2)$ ，我們可以用下圖來解釋。



我們可以發現  $x-y>1$  的點都在  $x-y=1$  的右邊，而  $x-y<1$  的點都在  $x-y=1$  的左邊。

在以下，我們要詳細解釋二元一次不等式的解法。首先我們要先決定二元一次方程式的表現方法，我們規定  $a$  和  $b$  都是正數，則二元一次方程式有兩種：

(1)  $ax+by=c$

(2)  $ax-by=c$

例子如下：

$x+2y=2$

$x-2y=2$

$x+2y=-2$

$x-2y=-2$

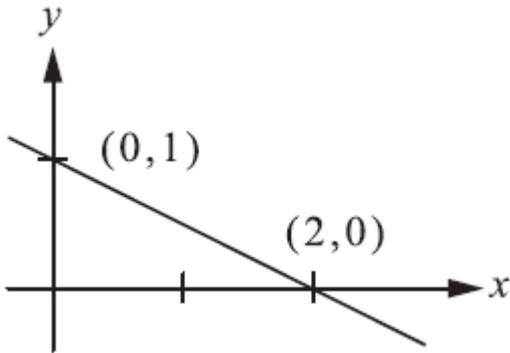
二元一次不等式因此也有兩種：

$$(1) ax+by>c$$

$$(2) ax-by>c$$

我們先考慮第一類： $ax+by>c$

我們先建立一條直線  $ax+by=c$ ，因為  $a$  和  $b$  都是正數，這條直線的斜率是負的。以  $x+2y=2$  為例，這條直線如下圖：



我們將這種  $ax+by=c$  稱之為  $ax+by>c$  的分隔線。

假設  $(x_1, y_1)$  滿足  $ax+by>c$ ，我們做一條通過  $(x_1, y_1)$  而且與  $ax+by=c$  平行的線，令此直線為  $ax+by=c'$ ，因為  $ax+by>c$ ，故  $c'>c$ 。

我們現在求  $ax+by=c$  和  $x$  軸和  $y$  軸的交點，我們將它們分別命名為  $x_c$  和  $y_c$ 。

令  $y=0$ ，則

$$ax_c = c$$

$$\therefore x_c = \frac{c}{a}$$

令  $x=0$ ，則

$$by_c = c$$

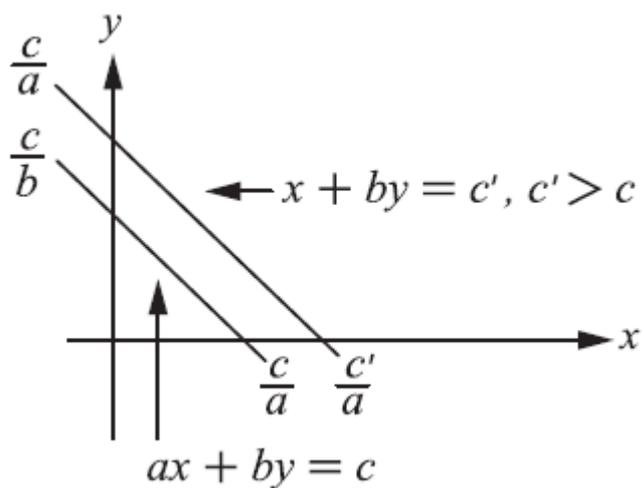
$$\therefore y_c = \frac{c}{b}$$

我們現在求 $ax + by = c'$ 在 $x$ 軸和 $y$ 軸上的交點：

$$x_{c'} = \frac{c'}{a}$$

$$y_{c'} = \frac{c'}{b}$$

請看下圖：

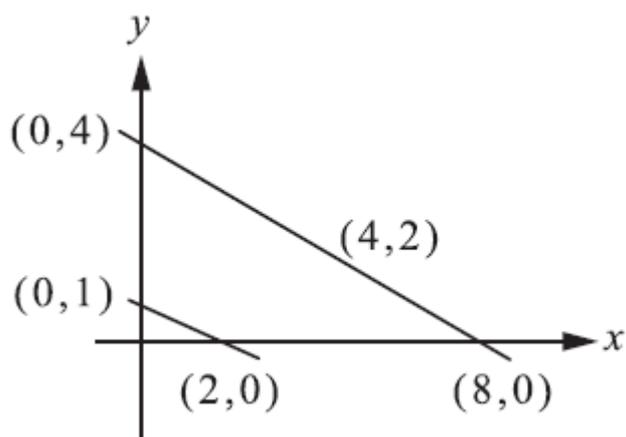


因為 $c' > c$ ，故 $\frac{c'}{a} > \frac{c}{a}$ ， $\frac{c'}{b} > \frac{c}{b}$ 。

以 $x+2y>2$ 為例， $(4, 2)$ 滿足這個不等式，通過 $(4, 2)$ 而且與 $x+2y=2$ 平行的直線是 $x + 2y = c'$

將 $x=4$ 和 $y=2$ 代入可得 $c'=8$

$x+2y=8$ 在 $x$ 軸上和 $y$ 軸上的交點分別是 $(8, 0)$ 和 $(0, 4)$ ，如下圖所示：



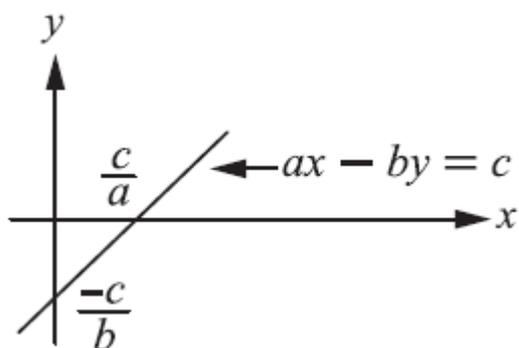
因為  $x_{c'} = \frac{c'}{a} > x_c = \frac{c}{a}$  ,  $y_{c'} = \frac{c'}{b} > y_c = \frac{c}{b}$  , 我們得知  $x+2y=8$  在  $x+2y=2$  的右邊。

結論:如果  $ax_1 + by_1 > c$  , 則  $(x_1, y_1)$  必定在  $ax+by=c$  的右邊。

同理, 如果  $ax_1 + by_1 < c$  , 則  $(x_1, y_1)$  必定在  $ax+by=c$  的左邊。

在下面, 我們要看  $ax-by > c$  的點

因為  $a$  和  $b$  都是正數, 因此  $ax-by > c$  的分隔線  $ax-by=c$  的斜率是正的, 如下圖所示:



$ax-by=c$  在  $x$  軸和  $y$  軸的交點是  $x_c$  和  $y_c$  , 則  $x_c = \frac{c}{a}$  ,  $y_c = \frac{-c}{b}$

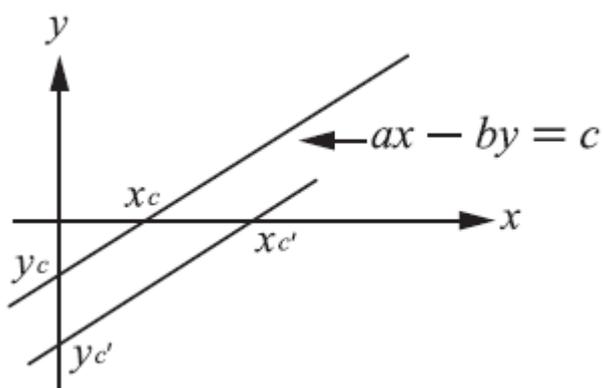
如  $(x_1, y_1)$  滿足  $ax-by=c$  , 則通過  $(x_1, y_1)$  而與  $ax-by=c$  平行的直線是  $ax-by=c'$  ,  $c' > c$  。此時,

$$x_{c'} = \frac{c'}{a}$$

$$y_{c'} = \frac{-c'}{b}$$

因此, 我們可得  $x_{c'} = \frac{c'}{a} > x_c = \frac{c}{a}$  ,  $y_{c'} = \frac{-c'}{b} < y_c = \frac{-c}{b}$

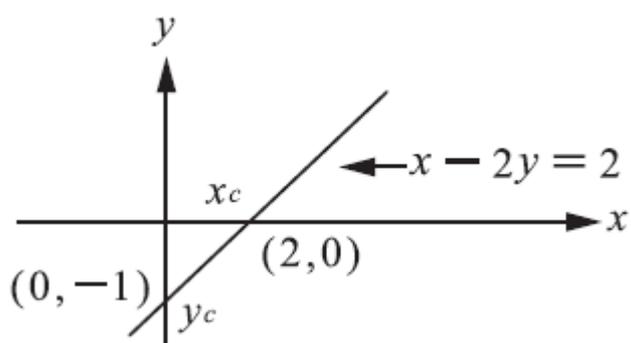
因為  $x_{c'} > x_c$  ,  $y_{c'} < y_c$  ,  $ax - by = c'$  在  $ax - by = c$  的右邊 , 如下圖所示 :



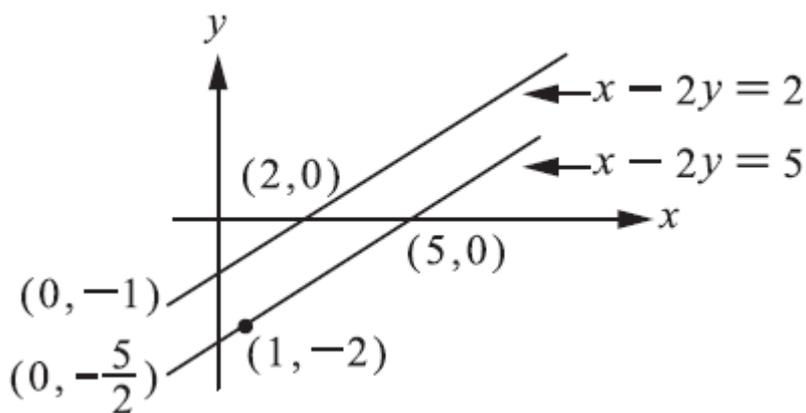
因此 , 我們得到與  $ax + by > c$  同樣的結論 : 如果  $(x_1, y_1)$  滿足  $ax - by > c$  , 則  $(x_1, y_1)$  在  $ax - by = c$  的右邊。

例 : 求滿足  $x - 2y > 2$  的點

$x - 2y > 2$  的分隔線是  $x - 2y = 2$  , 如下圖所示 :



$(1, -2)$  滿足  $x - 2y > 2$  , 因為  $1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5 > 2$  。通過  $(1, -2)$  而與  $x - 2y = 2$  平行的點是  $x - 2y = 5$  ,  $x - 2y = 5$  在  $x - 2y = 2$  的右邊。



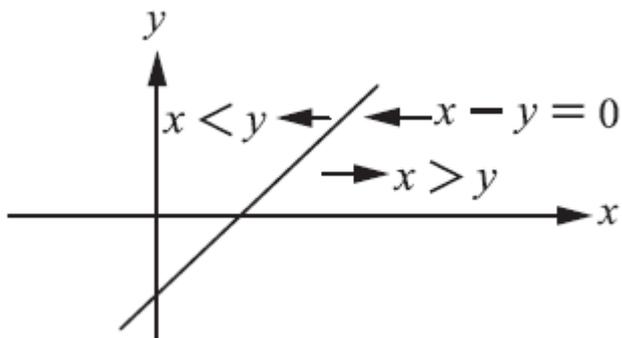
同理，我們可得：

如果 $(x_1, y_1)$ 滿足  $ax - by < c$ ，則 $(x_1, y_1)$ 在  $ax - by = c$  的左邊。

以下是一些有關二元一次不等式的例子：

(1) 求  $x > y$  和  $x < y$  的點

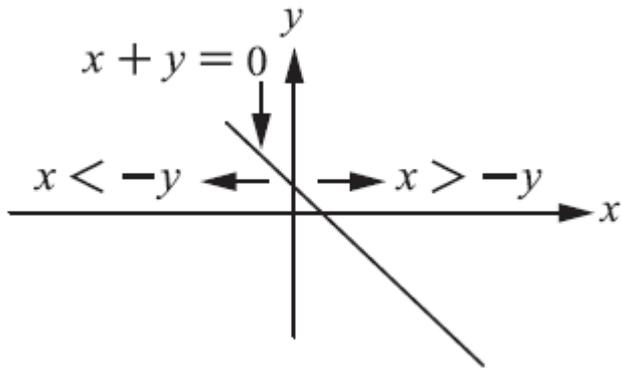
$x > y$ ，則  $x - y > 0$ ，分隔線是  $x - y = 0$ ，請看下圖：



各位可以看出 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(-2, -3)$ 等等，都在  $x - y = 0$  的右邊，而  $x < y$  的點 $(1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ 、 $(-3, -2)$ 等等，都在  $x - y = 0$  的左邊。

(2) 求  $x > -y$  和  $x < -y$  的點

$x > -y$ ，則  $x+y > 0$ ，分隔線是  $x+y=0$ ，如下圖所示：



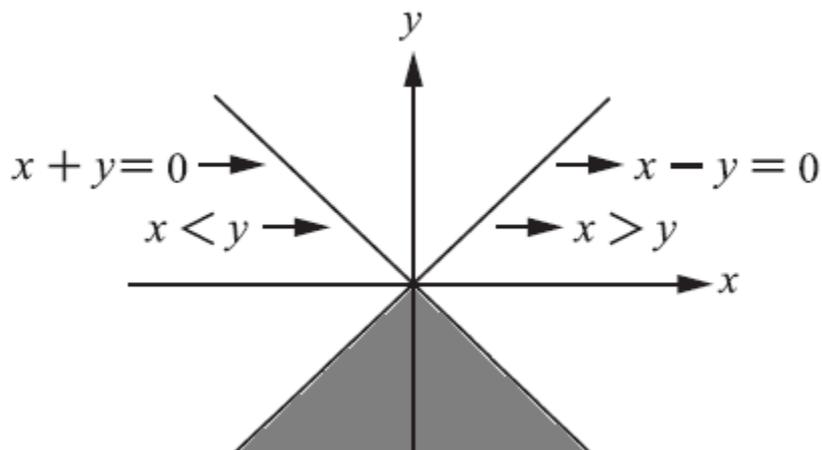
各位可以看出  $(1, 2)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(-1, 2)$  等等，都在  $x+y=0$  的右邊， $(1, -2)$ 、 $(-2, 1)$ 、 $(-2, -2)$  等等，都在  $x+y=0$  的左邊。

(3) 求滿足  $x > y$  和  $x < -y$  點的區域

從(1)可知， $x > y$  在  $x-y=0$  的右邊

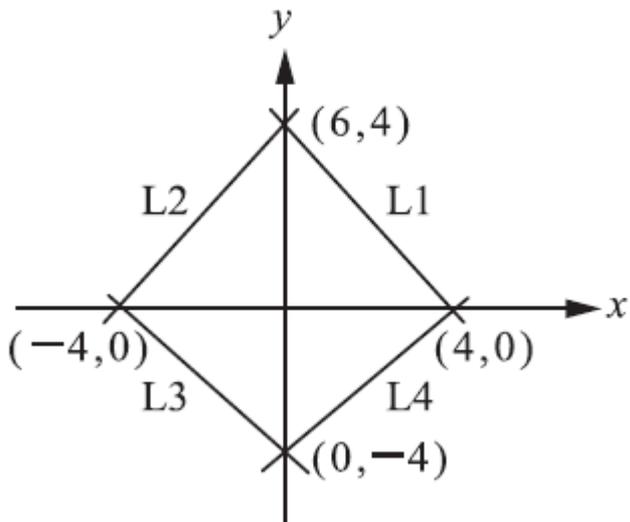
從(2)可知， $x < -y$  在  $x+y=0$  的左邊

故此題的答案如下圖所示：



滿足這兩個條件的點有  $(0, 1)$ 、 $(1, -2)$ 、 $(-1, -2)$

(4)請看下圖：



我們可以證明：

$$L1: x+y=4$$

$$L2: x-y=-4$$

$$L3: x+y=-4$$

$$L4: x-y=4$$

我們可以看出任何一在方塊內的點 $(x_1, y_1)$ 必定符合以下的方程式：

$$x+y < 4 \text{ (L1 的左邊)}$$

$$x-y > -4 \text{ (L2 的右邊)}$$

$$x+y > -4 \text{ (L3 的右邊)}$$

$$x-y < 4 \text{ (L4 的左邊)}$$

舉幾個例子：

(1, 2)在正方形內

$$1+2=3 < 4$$

$$1-2=-1 > -4$$

$$1+2=3 > -4$$

$$1-2=-1 < 4$$

(2, -1)在正方形內

$$2+(-1)=2-1=1 < 4$$

$$2-(-1)=2+1=3 > -4$$

$$2+(-1)=2-1=1>-4$$

$$2-(-1)=2+1=3<4$$

$(-1, -2)$ 也在正方形內

$$-1+(-2)=-1-2=-3<4$$

$$-1-(-2)=-1+2=1>-4$$

$$-1+(-2)=-1-2=-3>-4$$

$$-1-(-2)=-1+2=1<4$$