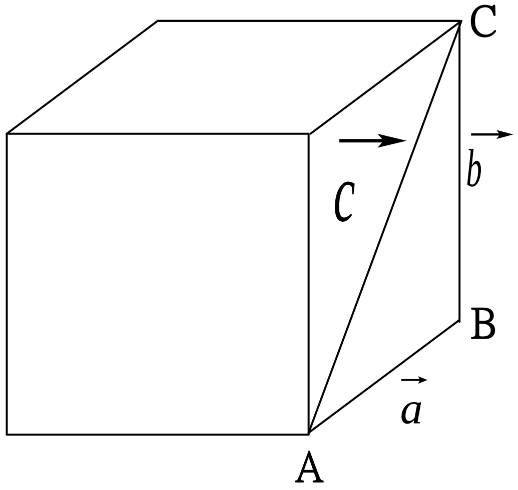
（25） 高階的向量

在以前，我們的向量只包含倆的元素，如$(3,5)$和$(-1,4)$。我們擴大向量的定義，使一個向量可以包含 n 個數字，n 可以加於 2，例如$(3,1,4)$、$(4,-1,5,-2)$等等，都是向量。如果一個向量含有 n 個數字，我們說這個向量是 n 度向量。

2 度向量可以想成 2 度空間的向量，我們現在討論 3 度向量，3 度向量是與 3 度空間有關的。

(5)請看下圖:



$A=(1,0,0)$
$B=(1,1,0)$
$C=(1,1,1)$
$\vec{a}=(1-1,1-0,0-0)=(0,1,0)$
$\vec{b}=(1-1,1-1,1-0)=(0,0,1)$
$\vec{c}=(1-1,1-0,1-0)=(0,1,1)$

我們可以看$\vec{a}$和$\vec{b}$是否垂直

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(0\times 0+1\times 0+0\times 0)=0$

$\therefore$ $\vec{a}$和$\vec{\mathrm{b}}$是互相垂直的

再看 $\vec{c}$和$\vec{a}$之間的角度θ

$$\cos\theta = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{0\times0+0\times1+1\times1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\times\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

(6)空間三點

$A=(1,2,1)$
$B=(-1,1,2)$
$C=(2,1,-1)$
$\overline{AB}$之間的向量$\vec{a}=(1-(-1),2-1,1-2)=(2,1,-1)$

$\overline{AC}$之間的向量$\vec{b}=(1-2,2-1,1-(-1))=(-1,1,2)$

$\overline{AB}$和$\overline{AC}$之間的夾角為θ

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times(-1)+1\times1+(-1)\times2 = -2+1-2 = -3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^\circ$$

科西不等式

假設有兩個向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，它們的夾角是θ，則

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,\theta$$

$$\because cos\,\theta \leq 1$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

這是科西不等式

(7)假設

$$\vec{a} = (4,2,3)$$
$$\vec{b} = (1,2,1)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\times1+2\times2+3\times1 = 4+4+3 = 11$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+2^2+3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29} \cong 5.4$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6} \cong 2.4$$

$$\therefore |\vec{a}|\,|\vec{b}| = 5.4\times2.4 = 12.96$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 11 < |\vec{a}|\,|\vec{b}| = 12.96$$

利用科西不等式，我們證明一個有趣的數學定理

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$$

證明的方法如下:

令$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\frac{1}{\sqrt{a}}$ ，$\frac{1}{\sqrt{b}}$ ，$\frac{1}{\sqrt{c}})$

$\therefore\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ，$a_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ，$a_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}$

令$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ ，$\sqrt{c})$

$\therefore\ b_1 = \sqrt{a}$ ，$b_2 = \sqrt{b}$ ，$b_3 = \sqrt{c}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \times \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}} \times \sqrt{c} = 1 + 1 + 1 = 3$$

根據科西不等式

$$3 \leq \sqrt{((\frac{1}{\sqrt{a}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{b}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{c}})^2) \times ((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2)}$$

$$3 \leq \sqrt{(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}) \times (a + b + c)}$$

$$\therefore (a + b + c) \times (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$$

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9$$

$$\frac{a}{a} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{b} + \frac{a+c}{b} + \frac{c}{c} + \frac{a+b}{c} \geq 9$$

$$3 + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 9$$

$$\therefore\ \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$$

(8)令$a = 3$，$b = 1$，$c = 4$

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{1+4}{3}+\frac{3+4}{1}+\frac{3+1}{4}=\frac{5}{3}+7+1=8+\frac{5}{3}>6$$