**(13) 三角函數和三角形**

請看下圖



假設我們已知的大小，也知道與的長度，我們如何能知道的長度呢？

我們通過點，做一直線垂直於，，如下圖。



我們令，，

因為我們已知的大小，因此可知

我們又知道

例1：，，

是一個正三角形

例2：，，



是一個等腰三角形

例3：，，

是一個直角三角形

**餘弦定理**

根據以上的討論，我們可得餘弦定理

餘弦定理在幾何上有兩個意義：

(1)三角形中，如果已知兩邊夾一角，則可根據餘弦定理確定三邊相等，因此可以得到幾何中的SAS定理，如下圖：



若，以及，根據餘弦定理，可知，因此可得

(2)如果三角形中，已知三邊、及，則所有的角都可確定。以角為例，

因為、、都已確定，因此可以確定，也就可以確定了。

**三角函數和三角形面積**



三角形面積是

但

令三角形的面積為，則

同理可以證明

以及

最後可得

也就是說，如果已知兩邊夾一角，即可求出三角形的面積。

例4：，，

**正弦定理**

因為

我們可以將以上的公式除以

可得

正弦定理就是

**正弦定理的意義**

要知道正弦定理的意義，我們先從直角三角形談起。



如上圖，我們得知

我們取的中點，畫一條平行於的直線，相交於點，也連接了，如下圖：



只要懂得如何證明三角形，就可以證明

因此可以得知點是外接圓的圓心，或者我們可以說是這外接圓的直徑，因此

以上公式中的是外接圓的半徑

有了這個認識，我們可以探討任何三角形中的意義，請看下圖。假設我們有一個任意的三角形。



我們畫一條直線，通過點，垂直於，



然後決定，使。



最後，取的中點，從以上的討論，我們可以得知，是三角形的直徑，換言之，。我們再考慮，因為，一定也是的外心，所以外接圓的半徑。

是直角三角形

，又

我們證明了一點，對於任何一個三角形，令是此三角形外接圓的半徑，則

**正弦定理在三角形全等證明上的應用**

例：兩角夾一邊

假設已知和以及邊



因為，所以也是已知的，根據正弦定理

因為、和都是已知的，因此可以決定。同理可以知道也可以求得。

**正弦定理和幾何的ASA定理**

從以上的討論，可以知道一旦兩角夾一邊是已知的，則這三角形的形狀就可以確定了。

在幾何中，假設我們有兩個三角形，如下圖。



已知，，，我們根據以上的討論，得知及，因此這兩個三角形是全等的，這就是幾何學中的ASA定理。

**正弦定理和等腰三角形**

假設中，



因為，而且

在幾何中，三角形的兩底角相等，則此三角形一定是等腰三角形。這個定理可以從正弦定理求得。

同理，如果我們知道，則

假設我們已知，我們可以根據正弦定理得到