108 年國中數學教育會考 數學科難題詳解

22 若正整數 a 和 420 的最大公因數為 35，則下列敘述何者正確？

(A) 20 可能是 a 的因數，25 可能是 a 的因數

(B) 20 可能是 a 的因數，25 不可能是 a 的因數

(C) 20 不可能是 a 的因數，25 可能是 a 的因數

(D) 20 不可能是 a 的因數，25 不可能是 a 的因數

詳解：

420 和 a 的最大公因數是 35

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 35 \times 2^2 \times 3$

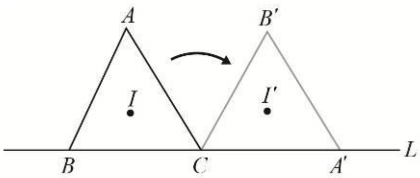
a 的因數有 5 和 7，但不能有 2 和 3，否則最大公因數不會是 35

20 不會是 a 的因數(20 的因數有 2)

25 可能是 a 的因數(25 的因數沒有 2 或 3)

故選(C)

23 如圖(十六)，有一三角形 ABC 的頂點 B、C 皆在直線 L 上，且其內心為 I。今固定 C 點，將此三角形依順時針方向旋轉，使得新三角形 $A'B'C$ 的頂點 A'落在 L 上，且其內心為 I'。若 $\angle A<\angle B<\angle C$，則下列敘述何者正確？



圖(十六)

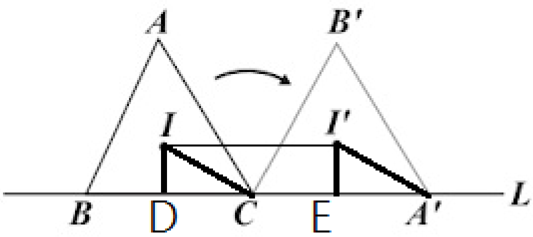
(A) $\overline{IC}$ 和 $\overline{I'A'}$ 平行，$\overline{II'}$ 和 L 平行

(B) $\overline{IC}$ 和 $\overline{I'A'}$ 平行，$\overline{II'}$ 和 L 不平行

(C) $\overline{IC}$ 和 $\overline{I'A'}$ 不平行，$\overline{II'}$ 和 L 平行

(D) $\overline{IC}$ 和 $\overline{I'A'}$ 不平行，$\overline{II'}$ 和 L 不平行

詳解：



做通過 I 且垂直 L 的線段，交 L 於 D

做通過 I’且垂直 L 的線段，交 L 於 E

∠IDC＝90°＝∠I’EA’

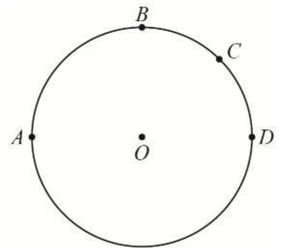
I、I’為內心，內心至三邊等距離→ $\overline{ID}=\overline{I'E}$ ，因此 $\overline{II'}//\overline{DE}$ //L

∠ICD＝ $\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB\neq\frac{1}{2}\angle B'A'C=\angle I'A'C$ (依題意∠A<∠C)

故 $\overline{IC}$ 和 $\overline{I'A'}$ 不平行 (同側內角不相等)

故選(C)

24　圖(十七)表示 A、B、C、D 四點在圓 O 上的位置，其中 $\overset{\frown}{AD}=180°$，且 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$。若阿超在 $\overset{\frown}{AB}$ 上取一點 P，在 $\overset{\frown}{BD}$ 上取一點 Q，使得 $\angle APQ=130°$，則下列敘述何者正確？

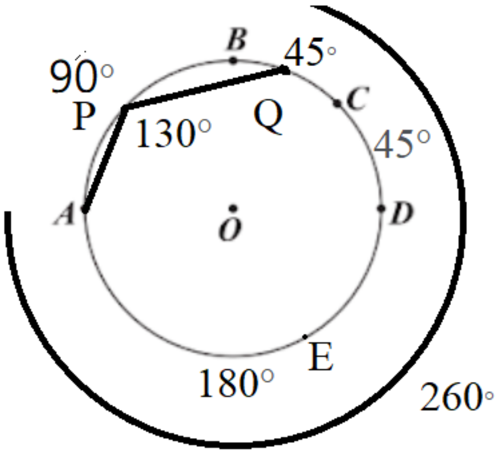


圖(十七)

(A) Q 點在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，且 $\overset{\frown}{BQ}>\overset{\frown}{QC}$　　(B) Q 點在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，且 $\overset{\frown}{BQ}<\overset{\frown}{QC}$

(C) Q 點在 $\overset{\frown}{CD}$ 上，且 $\overset{\frown}{CQ}>\overset{\frown}{QD}$　　(D) Q 點在 $\overset{\frown}{CD}$ 上，且 $\overset{\frown}{CQ}<\overset{\frown}{QD}$

詳解：



已知 $\overset{\frown}{AD}=180°$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，可得 $\overset{\frown}{AB}=90°$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=45°$

$\overset{\frown}{AEDC}=225°$、$\overset{\frown}{AEDB}=270°$

$\angle APQ=130°$，可知所對之弧，$\overset{\frown}{AEDQ}=260°$

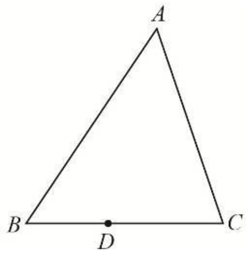
$225°<260°<270°$

$\overset{\frown}{BQ}=270°-260°=10°$

$\overset{\frown}{QC}=260°-225°=35°$

可知 $\overset{\frown}{BQ}<\overset{\frown}{QC}$，故選(B)

25　圖(十八)的$\triangle ABC$中，$\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{BC}$，且$D$為$\overline{BC}$上一點。今打算在$\overline{AB}$上找一點$P$，在$\overline{AC}$上找一點$Q$，使得$\triangle APQ$與$\triangle PDQ$全等，以下是甲、乙兩人的作法：



圖(十八)

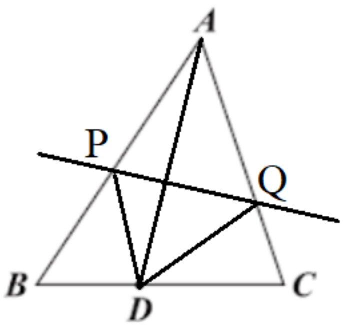
(甲) 連接$\overline{AD}$，作$\overline{AD}$的中垂線分別交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於P點、Q點，則　P、Q兩點即為所求

(乙) 過D作與$\overline{AC}$平行的直線交$\overline{AB}$於P點，過D作與$\overline{AB}$平行的直線交$\overline{AC}$於Q點，則P、Q兩點即為所求

(A) 兩人皆正確　(B) 兩人皆錯誤
(C) 甲正確，乙錯誤　(D) 甲錯誤，乙正確

詳解：

甲作法：



$\overline{PQ}$為$\overline{AD}$的中垂線

△APQ和△DPQ中：

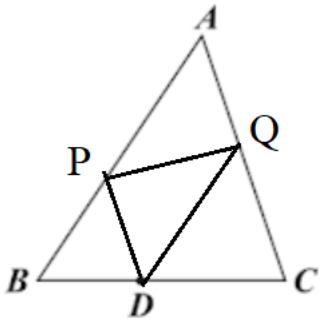
$\overline{PQ} = \overline{PQ}$

$\overline{PA} = \overline{PD}$(中垂線性質)

$\overline{QA} = \overline{QD}$(中垂線性質)

△APQ和△DPQ全等(SSS)，甲作法正確

乙作法：



$\overline{QA} // \overline{PD}$ 、$\overline{PA} // \overline{QD}$，故 APDQ 為平行四邊形

△APQ 和△DQP 中：

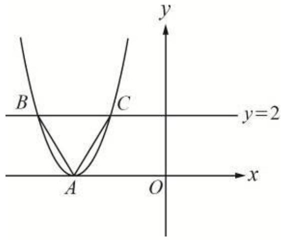
$\overline{PQ} = \overline{PQ}$

$\overline{PA} = \overline{QD}$ (平行四邊形對應邊等長)

$\overline{QA} = \overline{PD}$ (平行四邊形對應邊等長)

△APQ 和△DQP 全等(SSS)，乙作法正確
故選(A)

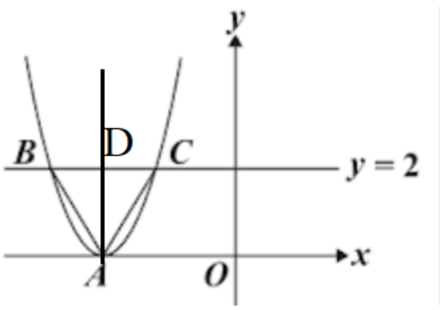
26 如圖(十九)，坐標平面上有一頂點為 A 的拋物線，此拋物線與方程式 $y=2$ 的圖形交於 B、C 兩點，且△ABC 為正三角形。若 A 點坐標為$(-3, 0)$，則此拋物線與 y 軸的交點坐標為何？



圖(十九)

(A) $(0, \frac{9}{2})$ (B) $(0, \frac{27}{2})$ (C) $(0, 9)$(D) $(0, 18)$

詳解：



拋物線頂點為$(-3,0)$，可設方程式為 $y=a(x+3)^2$，$a>0$

做 $\overline{BC}$ 的中點 D，並連接 $\overline{AD}$

因為△ABC 是正三角形，故△ADC 是 30°、60°、90°的直角三角形。

因為是 D 點之 y 座標為 2，故 $\overline{AD}=2$

$\overline{DC}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，C 點座標為$(-3+\frac{2}{\sqrt{3}},2)$

代入方程式 $y=a(x+3)^2$ 可求得 $a=\frac{3}{2}$

拋物線方程式為 $y=\frac{3}{2}(x+3)^2$

將 $x=0$ 代入，可求得 $y=\frac{27}{2}$，與 y 軸交點為$(0,\frac{27}{2})$，故選(B)