

# 107 年國中數學教育會考 數學科難題詳解

21. 已知坐標平面上有一直線  $L$ ，其方程式為  $y+2=0$ ，且  $L$  與二次函數  $y=3x^2+a$  的圖形相交於  $A$ 、 $B$  兩點；與二次函數  $y=-2x^2+b$  的圖形相交於  $C$ 、 $D$  兩點，其中  $a$ 、 $b$  為整數。

若  $\overline{AB}=2$ ， $\overline{CD}=4$ ，則  $a+b$  之值為何？

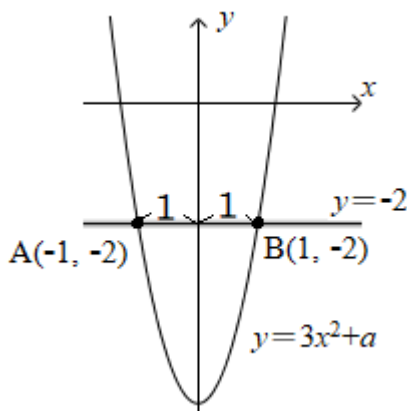
(A) 1 (B) 9 (C) 16 (D) 24

詳解：

已知  $L: y+2=0$ ，可以寫為  $y=-2$

設二次函數  $f(x)=y=3x^2+a$ 、二次函數  $g(x)=y=-2x^2+b$

(1).



$f(x)=y=3x^2+a=3(x-0)^2+a$ ，可知頂點為  $(0,a)$ ，對稱軸為  $x=0$ ，開口向上

$L$  與  $f(x)$  相交於  $A$ 、 $B$  兩點，因為  $L$  上任意點的  $y$  坐標為  $-2$ ，可設  $A(m, -2)$ 、 $B(n, -2)$ 。

(其中  $m<0$ 、 $n>0$ )

由  $\overline{AB}=2$ ，可得  $n-m=2\dots(\text{ㄅ})$

又  $f(x)$  對稱軸為  $x=0$ ，即  $\frac{m+n}{2}=0\dots(\text{ㄆ})$

解(ㄅ)(ㄆ)得  $m=-1$ 、 $n=1 \rightarrow A(-1, -2)$ 、 $B(1, -2)$ 。

將  $A(-1, -2)$  代入  $f(x)=y=3x^2+a$

$$-2=3 \times (-1)^2+a$$

$$-2=3+a$$

$$a=-5$$

(2).  $L$  與  $g(x)$  相交於  $C$ 、 $D$  兩點，因為  $L$  上任意點的  $y$  坐標為  $-2$ ，可設  $C(p, -2)$ 、 $D(q, -2)$ 。

(其中  $p<0$ 、 $q>0$ )

由  $\overline{CD}=4$ ，可得  $p-q=4\dots(\text{ㄱ})$

又  $g(x)$  對稱軸為  $x=0$ ，即  $\frac{p+q}{2}=0\dots(\text{ㄴ})$

解(ㄱ)(ㄴ)得  $p=-2$ 、 $q=2 \rightarrow C(-2, -2)$ 、 $D(2, -2)$ 。

將  $C(-2, -2)$  代入  $f(x)=y=-2x^2+b$

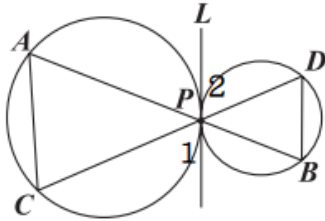
$$-2=-2 \times (-2)^2+b$$

$$-2=-8+b$$

$$b=6$$

(3).  $a+b=-5+6=1$ ，故選(A)

22. 如圖(十三)，兩圓外切於  $P$  點，且通過  $P$  點的公切線為  $L$ 。過  $P$  點作兩直線，兩直線與兩圓的交點為  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ，其位置如圖(十三)所示。若  $\overline{AP} = 10$ ， $\overline{CP} = 9$ ，則下列角度關係何者正確？



圖(十三)

- (A)  $\angle PBD > \angle PAC$     (B)  $\angle PBD < \angle PAC$   
 (C)  $\angle PBD > \angle PDB$     (D)  $\angle PBD < \angle PDB$

詳解：

(1).  $\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{PC} = \angle PAC$  (弦切角的度數等於其所夾弧度數的一半)

$\angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{PD} = \angle PBD$  (弦切角的度數等於其所夾弧度數的一半)

$\angle 1 = \angle 2$  (對頂角相等)

$\rightarrow \angle PAC = \angle PBD$  (遞移律)

(2). 同理  $\angle PCA = \angle PDB$

(3).  $\triangle PAC$  中， $\overline{AP} = 10 > 9 = \overline{CP}$ ，故  $\angle PCA > \angle PAC$  (大邊對大角)

大小關係為： $\angle PDB = \angle PCA > \angle PAC = \angle PBD$  (遞移律)，故選(D)

23. 小柔想要榨果汁，她有蘋果、芭樂、柳丁三種水果，且其顆數比為 9:7:6。小柔榨完果汁後，蘋果、芭樂、柳丁的顆數比變為 6:3:4。已知小柔榨果汁時沒有使用柳丁，關於她榨果汁時另外兩種水果的使用情形，下列敘述何者正確？
- (A) 只使用蘋果  
(B) 只使用芭樂  
(C) 使用蘋果及芭樂，且使用的蘋果顆數比使用的芭樂顆數多  
(D) 使用蘋果及芭樂，且使用的芭樂顆數比使用的蘋果顆數多

詳解：

榨果汁前，蘋果、芭樂、柳丁顆數比為 9:7:6

設顆數分別為  $9r$ 、 $7r$ 、 $6r$  ( $r>0$ )

榨果汁後，蘋果、芭樂、柳丁顆數比為 6:3:4

設顆數分別為  $6s$ 、 $3s$ 、 $4s$  ( $s>0$ )

因為沒有使用柳丁，所以  $6r=4s$ 、 $r:s=4:6=2:3$

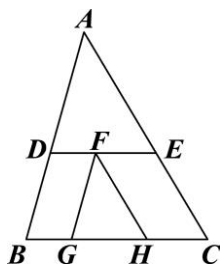
設  $r=2t$ 、 $s=3t$  ( $t>0$ )

榨果汁前的顆數為  $18t$ 、 $14t$ 、 $12t$

榨果汁後的顆數為  $18t$ 、 $9t$ 、 $12t$

可看出蘋果維持  $18t$  未使用，只使用芭樂，故選(B)

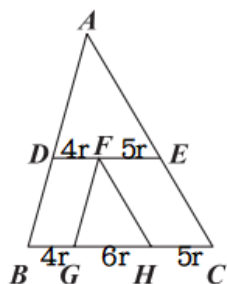
24. 如圖(十四)， $\triangle ABC$ 、 $\triangle FGH$  中， $D$ 、 $E$  兩點分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  上， $F$  點在  $\overline{DE}$  上， $G$ 、 $H$  兩點在  $\overline{BC}$  上，且  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{FG} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{FH} \parallel \overline{AC}$ 。若  $\overline{BG} : \overline{GH} : \overline{HC} = 4 : 6 : 5$ ，則  $\triangle ADE$  與  $\triangle FGH$  的面積比為何？



圖(十四)

- (A) 2 : 1    (B) 3 : 2    (C) 5 : 2    (D) 9 : 4

詳解：



(1).  $\overline{BG} : \overline{GH} : \overline{HC} = 4 : 6 : 5$

設  $\overline{BG} = 4r, \overline{GH} = 6r, \overline{HC} = 5r$     ( $r > 0$ )

(2). 四邊形  $BDFG$  為平行四邊形 ( $\overline{DE} \parallel \overline{BC}, \overline{FG} \parallel \overline{AB}$ )

$$\overline{DF} = \overline{BG} = 4r$$

(3). 四邊形  $FECH$  為平行四邊形 ( $\overline{DE} \parallel \overline{BC}, \overline{FH} \parallel \overline{AC}$ )

$$\overline{FE} = \overline{HC} = 5r$$

$$\overline{DE} = \overline{DF} + \overline{FE} = 4r + 5r = 9r$$

(4).  $\triangle ADE$  和  $\triangle FGH$  中

$$\angle ADE = \angle ABC = \angle FGH \text{ (同位角相等)}$$

$$\angle AED = \angle ACB = \angle FHG \text{ (同位角相等)}$$

$\triangle ADE$  與  $\triangle FGH$  相似 (根據 AA 相似)

(5). 相似三角形面積比 = 邊長比

$$\triangle ADE : \triangle FGH$$

$$= \overline{DE}^2 : \overline{GH}^2$$

$$= (9r)^2 : (6r)^2$$

$$= 81r^2 : 36r^2$$

$$= 9 : 4$$

故選(D)

25. 某商店將巧克力包裝成方形、圓形禮盒出售，且每盒方形禮盒的價錢相同，每盒圓形禮盒的價錢相同。阿郁原先想購買 3 盒方形禮盒和 7 盒圓形禮盒，但他身上的錢會不足 240 元，如果改成購買 7 盒方形禮盒和 3 盒圓形禮盒，他身上的錢會剩下 240 元。若阿郁最後購買 10 盒方形禮盒，則他身上的錢會剩下多少元？
- (A) 360 (B) 480 (C) 600 (D) 720

詳解：

設 1 盒方形禮盒  $x$  元，1 盒圓形禮盒  $y$  元

- (1). 依題意，買 3 盒方形和 7 盒圓形會不足 240 元

$$\text{身上的錢} = (3x + 7y - 240) \text{元}$$

- (2). 依題意，買 7 盒方形和 3 盒圓形會剩下 240 元

$$\text{身上的錢} = (7x + 3y + 240) \text{元}$$

- (3). 列式

$$3x + 7y - 240 = 7x + 3y + 240$$

$$-480 = 4x - 4y$$

$$x - y = -120$$

- (4). 買 10 盒方形禮盒

剩下的錢 = 身上的錢 - 用掉的錢

$$(3x + 7y - 240) - 10x$$

$$= -7x + 7y - 240$$

$$= -7(x - y) - 240$$

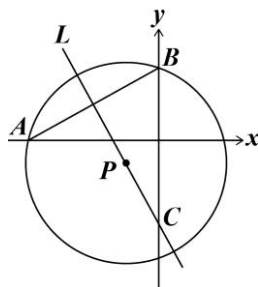
$$= (-7) \times (-120) - 240$$

$$= 840 - 240$$

$$= 600$$

故選(C)

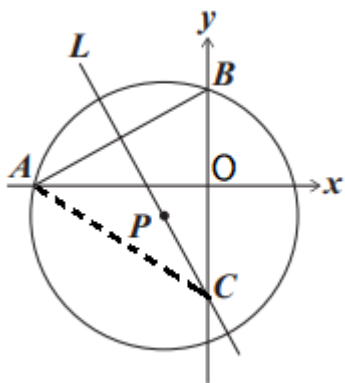
26. 如圖(十五)，坐標平面上， $A$ 、 $B$  兩點分別為圓  $P$  與  $x$  軸、 $y$  軸的交點，有一直線  $L$  通過  $P$  點且與  $\overline{AB}$  垂直， $C$  點為  $L$  與  $y$  軸的交點。若  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐標分別為  $(a, 0)$ 、 $(0, 4)$ 、 $(0, -5)$ ，其中  $a < 0$ ，則  $a$  的值為何？



圖(十五)

- (A)  $-2\sqrt{14}$  (B)  $-2\sqrt{5}$   
 (C)  $-8$  (D)  $-7$

詳解：



(1). 已知  $B(0,4)$ 、 $C(0, -5)$ ，故  $\overline{CB} = 4 - (-5) = 9$

連接  $A$ 、 $C$

$\overline{CA} = \overline{CB} = 9$  (中垂線上任一點到此線段的兩端等距離)

(2). 已知  $A(a,0)$

在直角  $\triangle OAC$  中，

$$\overline{CA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2$$

$$9^2 = 5^2 + |a|^2$$

$$|a|^2 = 56$$

$$a = \pm\sqrt{56}$$

$$a = \pm 2\sqrt{14} \text{ (A 在 } x \text{ 軸負向，} a \text{ 取負)}$$

$$a = -2\sqrt{14}$$

故選(A)