代數第九章

目錄

第九章 二次函數

前一章我們學過了一次函數，本章將繼續延伸到二次函數。二次函數的函數圖形為拋物線，拋物線在日常生活中隨處可見。例如投球時，球的移動軌跡就屬於拋物線。我們也將利用二次函數處理關於最大值、最小值的問題。

學習目標

1. 能畫出二次函數的函數圖形。

2. 能找出拋物線的頂點、開口方向、對稱軸。

2. 能利用二次函數解決最大值、最小值的問題。

3. 能處理二次函數的應用題。

9.1 節 二次函數及其圖形

在第八章中，我們已經學過一次函數 $f(x)=ax+b$ 的函數圖形是一條直線。也簡單畫過 $y=f(x)=x^2$ 的圖形是一條拋物線。本節我們將針對 $y=f(x)=x^2$ 這類二次函數來做討論。

二次函數：形式為 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$。即變數 x 最高次數為 2，且 x^2 項係數不為 0 的函數。

如同第八章中我們可以畫出一次函數的函數圖形，對於二次函數如 $f(x)=x^2$ 我們也可以畫出函數圖形。

我們來畫畫看 $y=f(x)=x^2$ 的圖形，先找出幾個符合的點：

x	-3	-1	0	1	3
y	9	1	0	1	9

表 9.1-1

將這些點描在直角座標上，並用直線連起來，如圖 9.1-1。

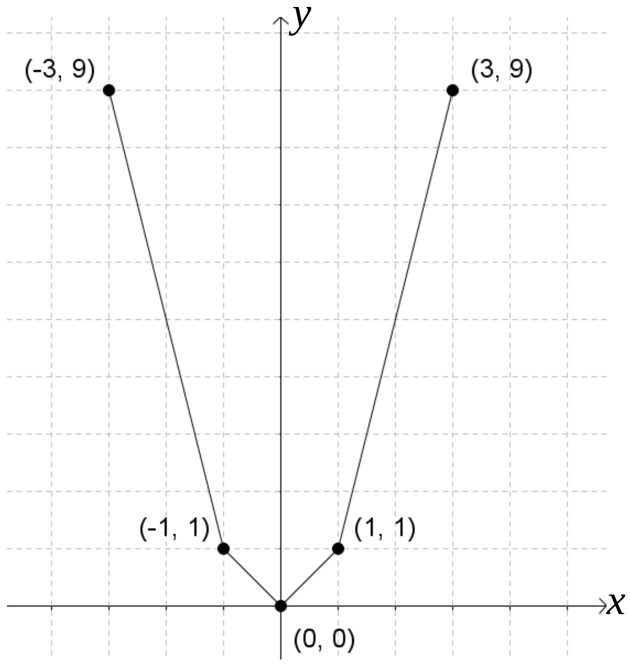


圖 9.1-1

於是我們得到了一個類似折線圖的圖形，但事實上這張圖只是 $y = f(x) = x^2$ 的近似圖，並非真正的圖形。我們可以再多增加(－2,4)、(2,4)兩個點，如圖 9.1-2：

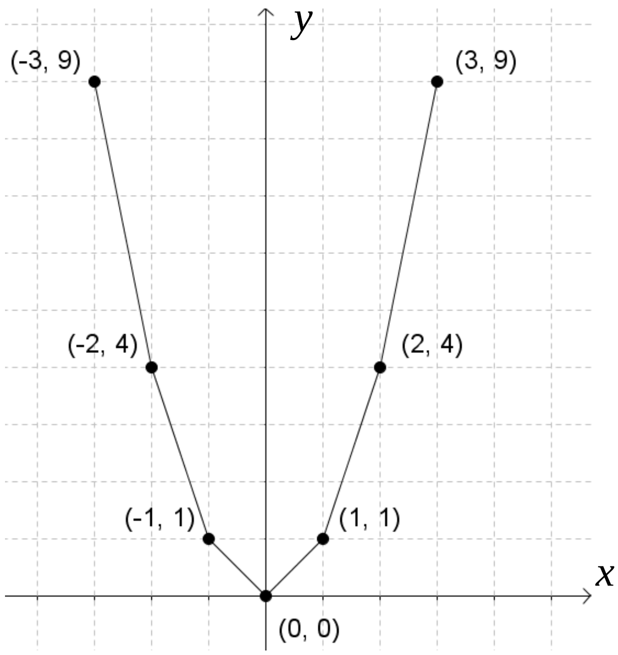


圖 9.1-2

可以看出圖 9.1-1 與圖 9.1-2 的圖形不太一樣，我們描的點越多，畫出來的圖形就會越接近真正的 $f(x) = x^2$ 圖形。實際上， $f(x) = x^2$ 是如圖 9.1-3 的拋物線。

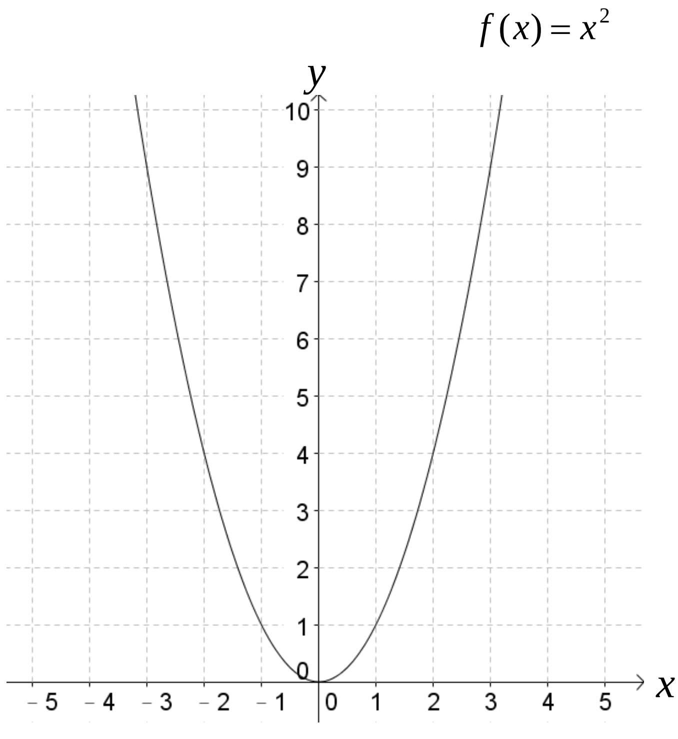


圖 9.1-3

畫二次函數圖形時，我們無法畫出所有的點。因此一般只需畫出幾個點，再將各點連接起來作為近似圖，取的點愈多，畫出來的圖形就愈精確。

例題 9.1-1

畫出二次函數 $f(x)=-2x^2$ 的圖形。

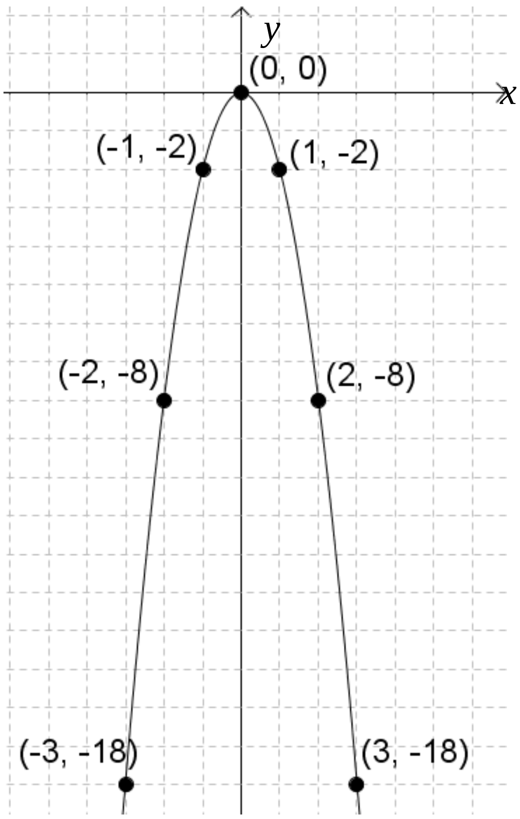
詳解：

令 $y=f(x)=-2x^2$ ，先找出數個圖形上的點。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

表 9.1-2

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-2。



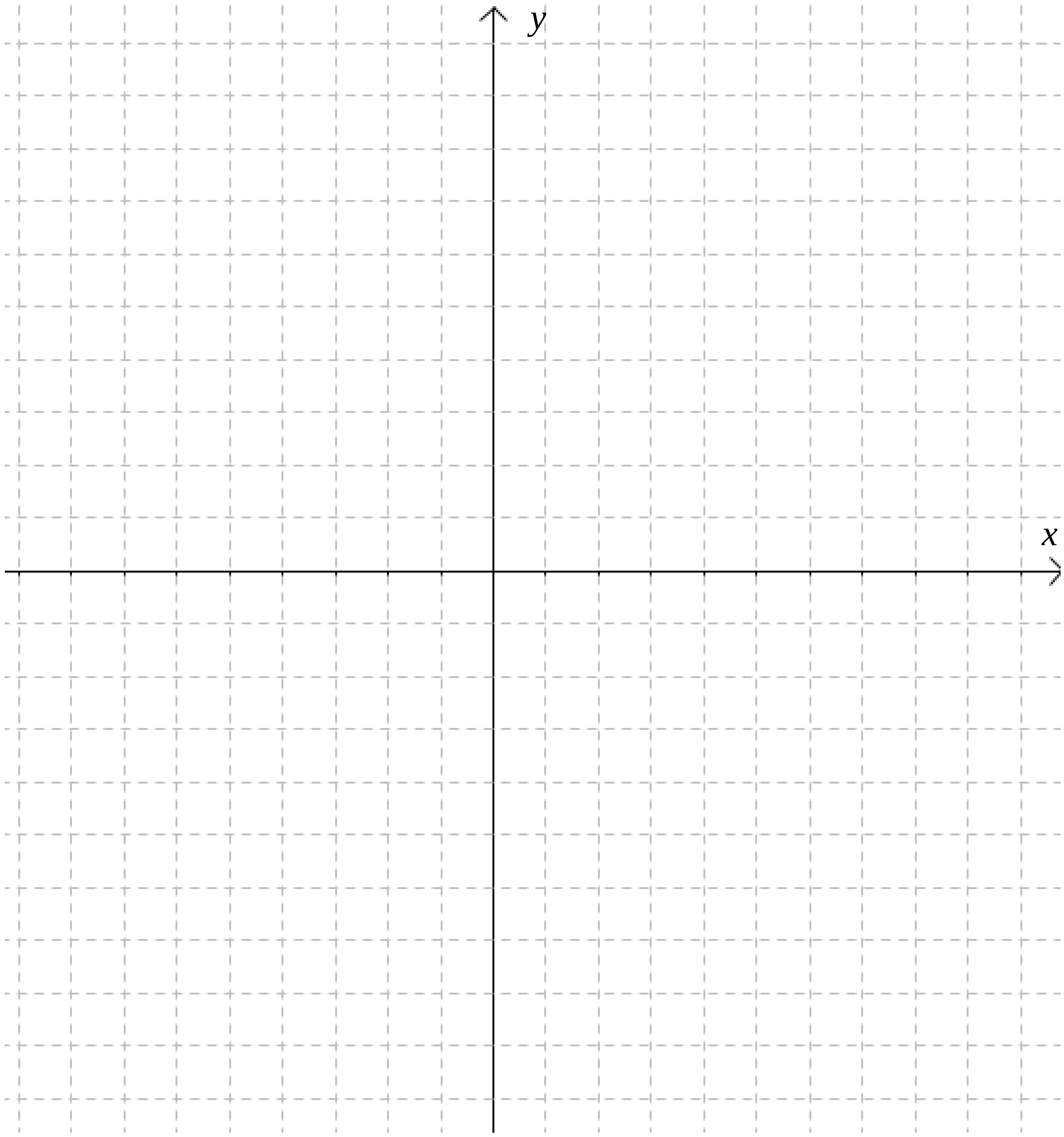
$f(x)=-2x^2$

圖 9.1-4

【練習】9.1-1

畫出二次函數 $f(x) = -x^2$ 的圖形。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



由前面例題，我們已知道函數 $f(x)=x^2$ 與 $f(x)=-2x^2$ 的函數圖形都是拋物線。事實上，只要是二次函數，那麼所畫出來的圖形都是拋物線。因此我們討論二次函數的函數圖形時，相當於是討論拋物線的圖形。

接著我們來討論由二次函數所畫出拋物線圖形的一些性質，先複習第四章曾學過的對稱於 y 軸：

若兩點對稱於 y 軸，則兩點的 y 座標相同時，x 座標互為相反數。

再來觀察 $f(x)=x^2$ 的函數圖形，即 $y=f(x)=x^2$。圖形右側的點 $(1,1)$、$(2,4)$、$(3,9)$，他們對 y 軸的對稱點 $(-1,1)$、$(-2,4)$、$(-3,9)$，也都落在 $y=x^2$ 上。 事實上，所有 $y=x^2$ 上的點 (h,k)，對 y 軸的對稱點 $(-h,k)$ 也都在 $y=x^2$ 上。此時我們稱 y 軸(或直線 $x=0$)是 $y=x^2$ 的對稱軸。即 $f(x)=x^2$ 的函數圖形，其對稱軸為 y 軸。

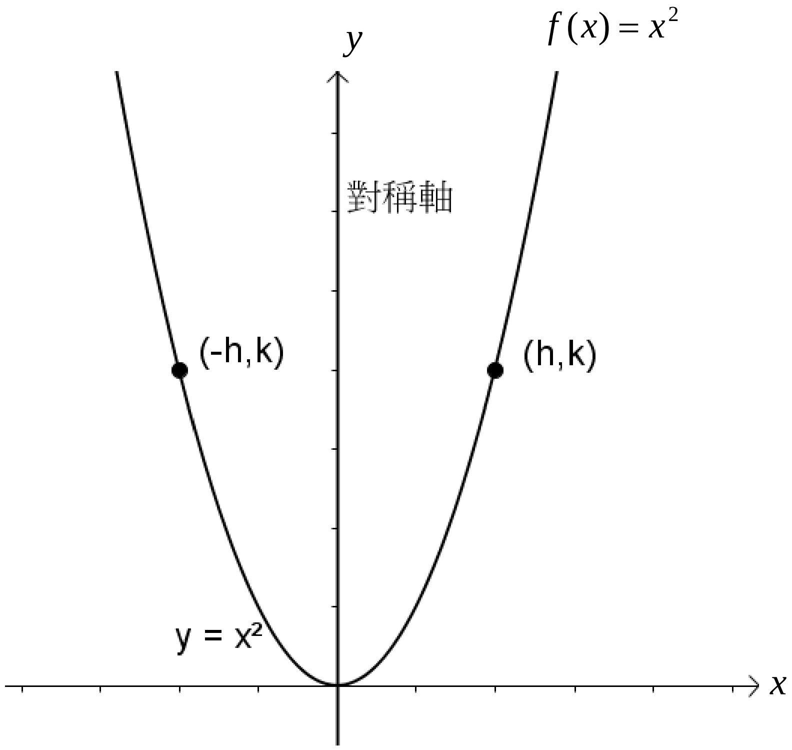


圖 9.1-5

除了 $f(x)=x^2$ 以外，所有形式為 $f(x)=ax^2$ 的函數圖形，也都是以 y 軸為對稱軸。

我們來證明 $y=f(x)=ax^2$ 是以 y 軸為對稱軸。已知點 (h,k) 在 $y=ax^2$ 上，若點 $(-h,k)$ 也在 $y=ax^2$ 上(即 x 座標代入 $-h$ ，可得 y 座標為 k)，則可知 $y=ax^2$ 以 y 軸為對稱軸。

$y=ax^2$

$y=a\times(-h)^2$　　　　(將 x 以 $-h$ 代入)

$y=ah^2$　　　　　　　($(-h)^2=h^2$)

$y=k$　　　　　　　　(因為 (h,k) 在 $y=ax^2$ 上，所以 $k=ah^2$ ，即 $ah^2=k$)

由以上式子可知，當點 (h,k) 在 $y=ax^2$ 上時，點 $(-h,k)$ 也在 $y=ax^2$ 上，因此 $y=f(x)=ax^2$ 的圖形是以 y 軸作為對稱軸。我們也可以稱 $f(x)=ax^2$ 的函數圖形是對稱於 y 軸的線對稱圖形。

例題 9.1-2

(1)找出二次函數 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，其函數圖形的對稱軸。

(2)畫出 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形。

詳解：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 符合 $f(x)=ax^2$ 的形式，因此是以 y 軸為對稱軸。

(2) $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形對稱於 y 軸。我們只要畫出右側的圖形，再利用線對稱畫出左側的圖形即可。

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$

表 9.1-3

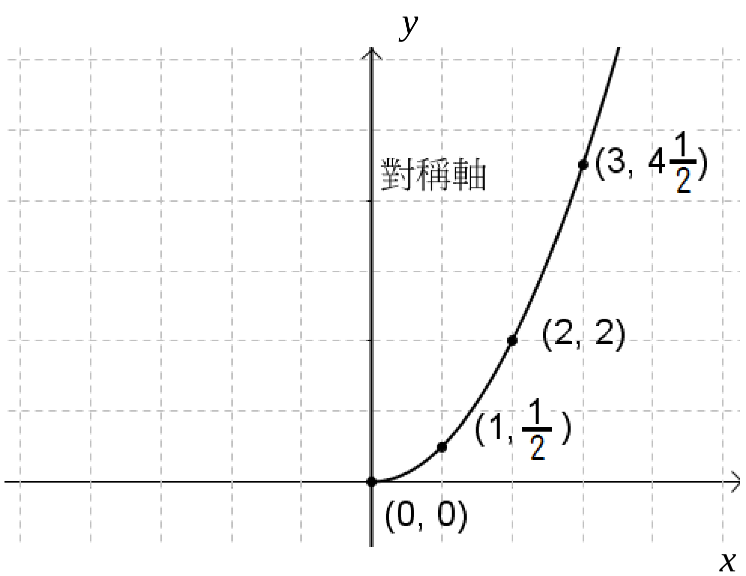


圖 9.1-6

圖 9.1-6，先畫出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 右半邊的圖形，接著再利用線對稱，畫出左半邊的圖形。

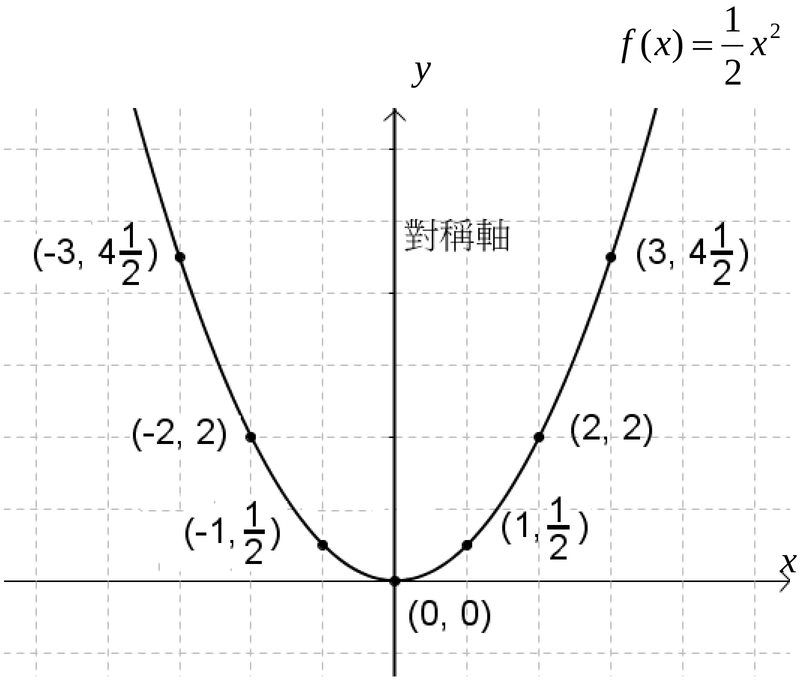
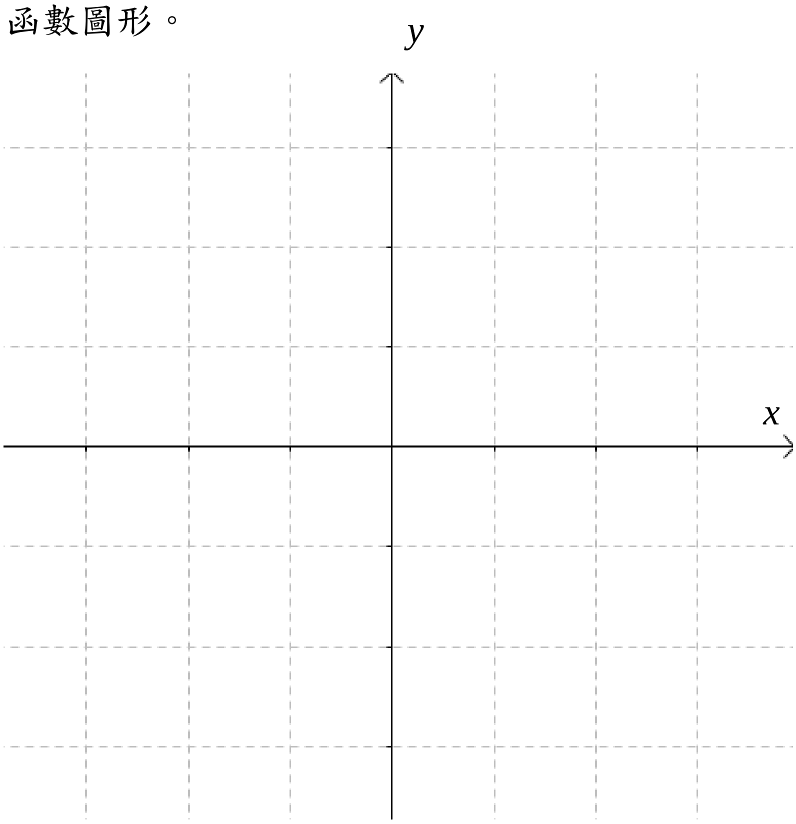


圖 9.1-7

圖 9.1-7 即為 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形。

【練習】9.1-2

利用對稱軸，畫出 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2$ 的函數圖形。



目前二次函數所畫出的拋物線圖形，有些是開口向上，有些是開口向下，開口方向是否有什麼規則呢？我們多畫幾個圖形來看看。

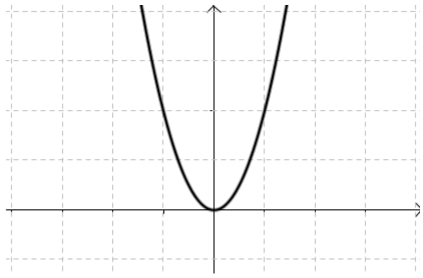
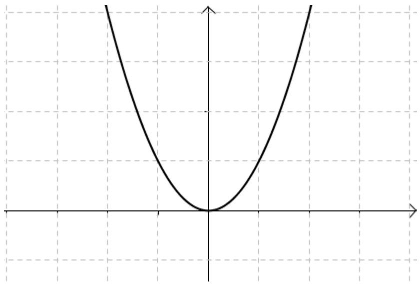
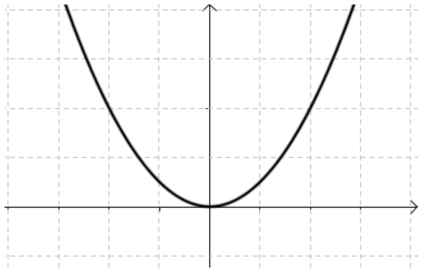
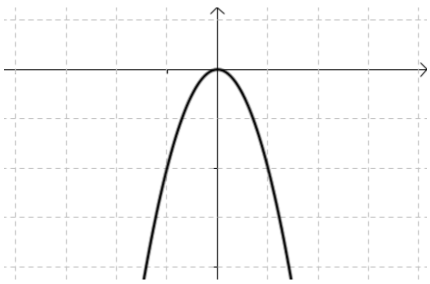
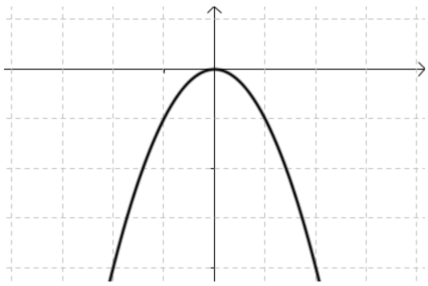
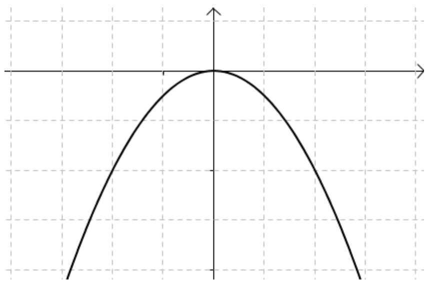
開口向上	$f(x)=2x^2$ 	$f(x)=x^2$ 	$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 
開口向下	$f(x)=-2x^2$ 	$f(x)=-x^2$ 	$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 

圖 9.1-8

同學應該可以發現，對於二次函數 $f(x)=ax^2$，當 $a>0$ 時，拋物線圖形開口向上；當 $a<0$ 時，拋物線圖形開口向下。而且 $|a|$ 越小，其開口越大。

另外在 $a>0$ 時，拋物線有最低點；$a<0$ 時，拋物線有最高點。這個點稱為**頂點**。頂點也是拋物線與對稱軸的交點。

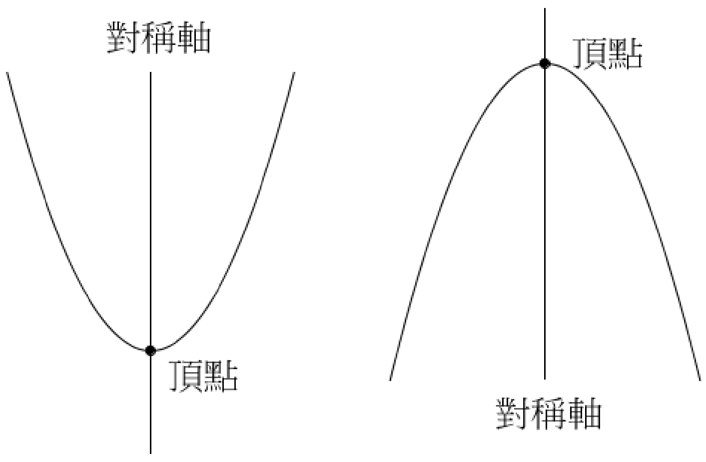


圖 9.1-9

例題 9.1-3

寫出下列各函數圖形的開口方向：

(1) $f(x)=3x^2$　(2) $f(x)=-8x^2$　(3) $f(x)=0.7x^2$

詳解：

(1) $3>0$，$f(x)=3x^2$ 函數圖形開口向上。

(2) $-8<0$，$f(x)=-8x^2$ 函數圖形開口向下。

(3) $0.7>0$，$f(x)=0.7x^2$ 函數圖形開口向上。

【練習】9.1-3

寫出下列各函數圖形的開口方向：

(1) $f(x)=-2x^2$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{50}x^2$　(3) $f(x)=-0.3x^2$

瞭解了 $f(x)=ax^2$ 的函數圖形後，接著我們來看看形式為 $f(x)=ax^2+k$ 的函數圖形。如 $f(x)=x^2+1$：

一樣先找出 $y=f(x)=x^2+1$ 上的點

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

表 9.1-4

然後描點畫出圖形：

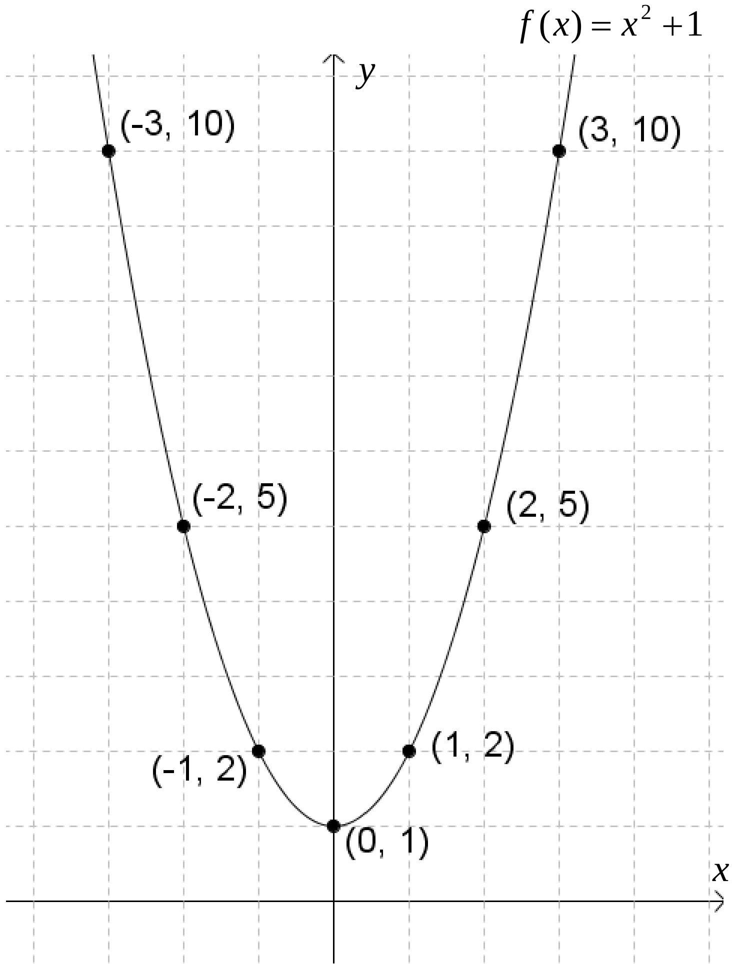


圖 9.1-10

圖 9.1-10 即為 $y=f(x)=x^2+1$ 的圖形，頂點為 $(0,1)$，對稱軸為 $x=0$。

例題 9.1-4

畫出 $f(x)=-2x^2+3$ 的函數圖形，並指出頂點。

詳解：

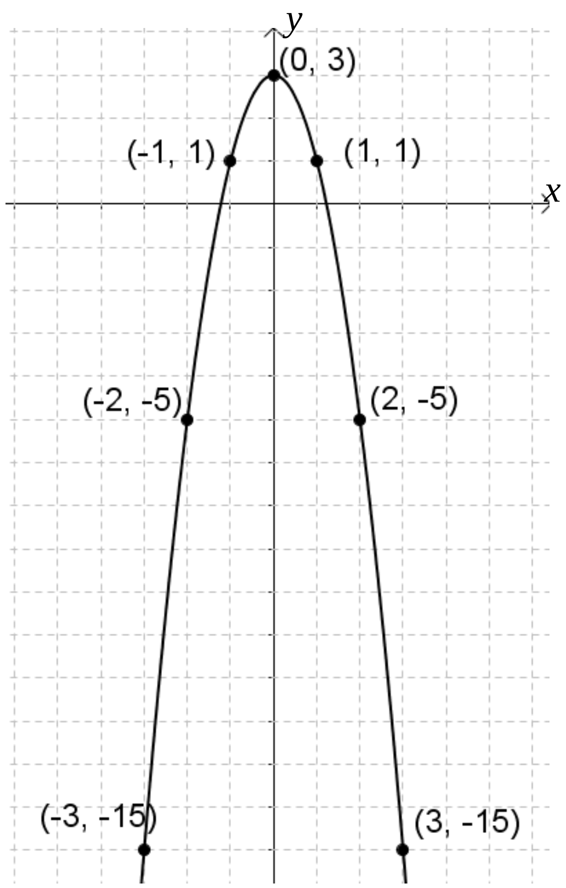
先找出數個圖形上的點。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	-5	1	3	1	-5	-15

表 9.1-5

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-11。

頂點為 $(0,3)$。



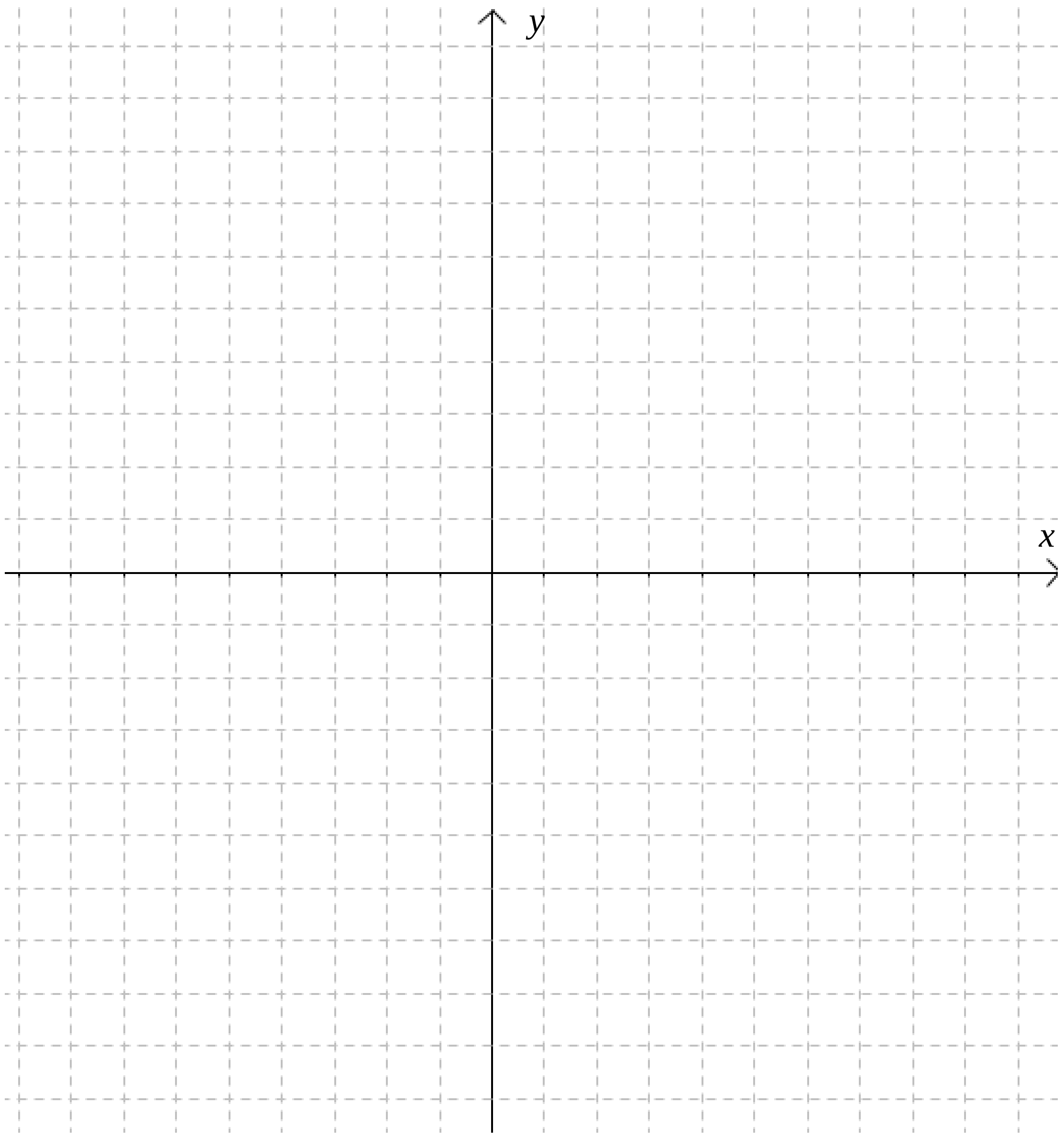
$f(x)=-2x^2+3$

圖 9.1-11

【練習】9.1-4

畫出 $f(x)=-x^2+6$ 的函數圖形，並指出頂點。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



例題 9.1-5

畫出 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4$ 的函數圖形，並指出頂點。

詳解：

先找出數個圖形上的點。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	-2	$-3\frac{1}{2}$	-4	$-3\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$

表 9.1-6

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-12。

頂點為 $(0,-4)$。

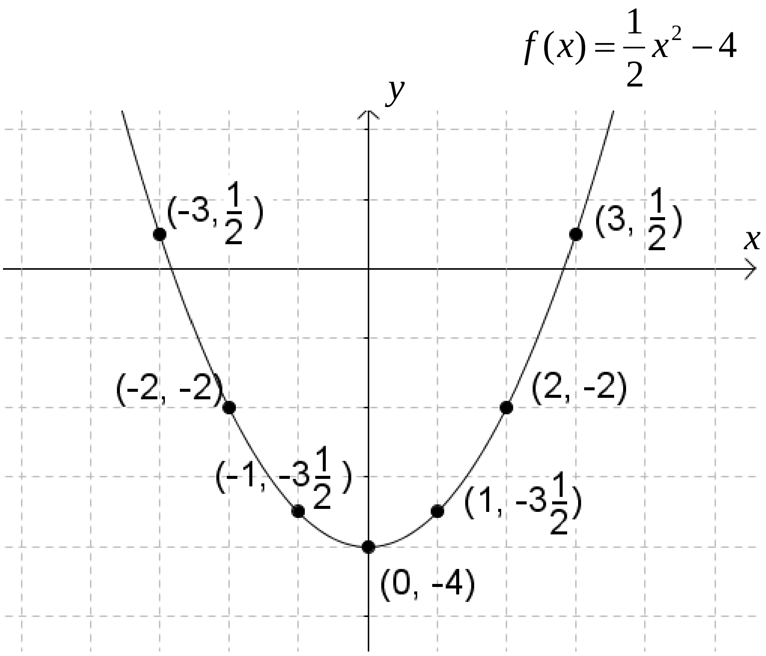
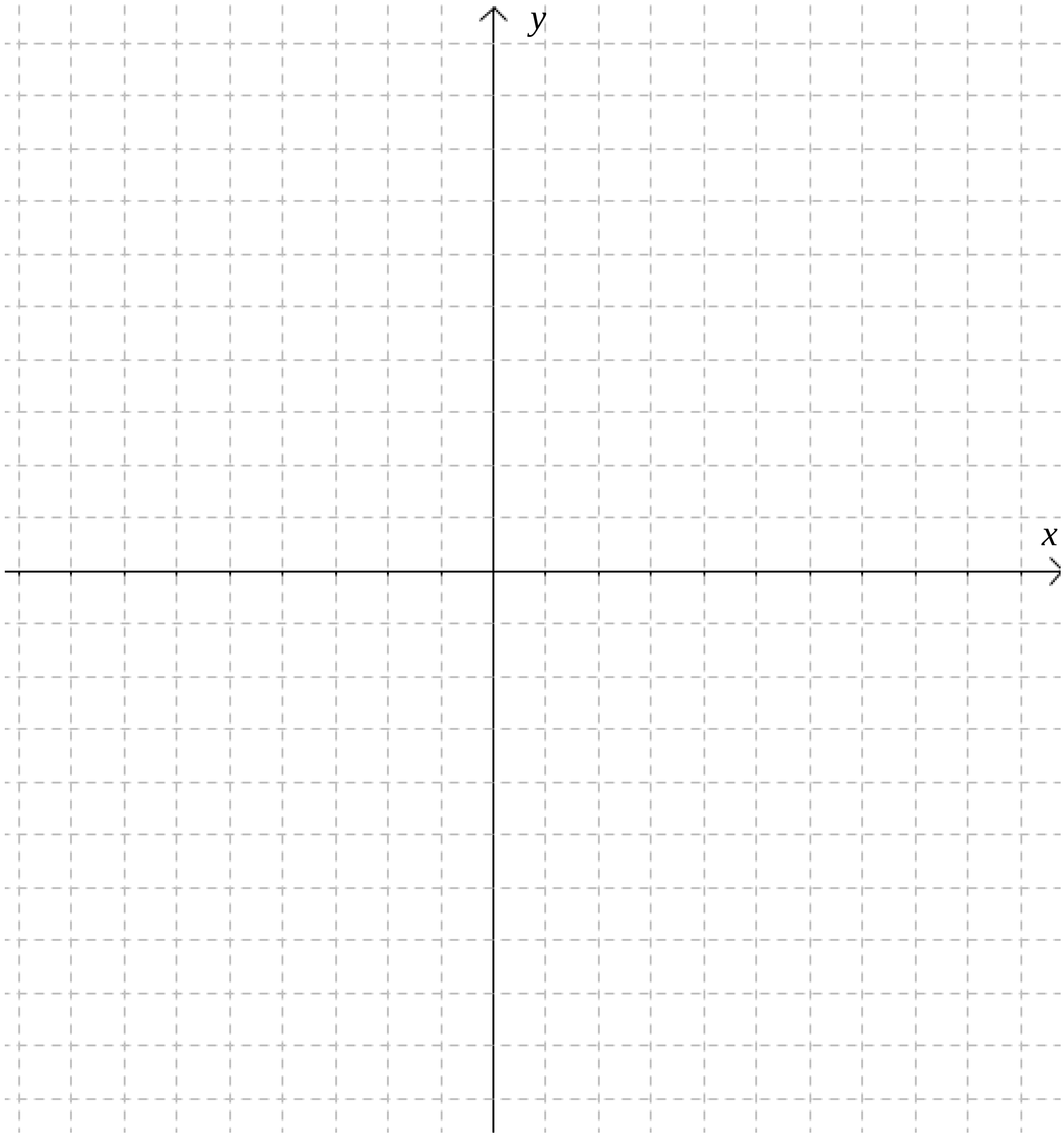


圖 9.1-12

【練習】9.1-5

畫出 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-7$ 的函數圖形，並指出頂點。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



目前我們已經畫出了數個形式為 $f(x)=ax^2+k$ 的函數圖形。若與 $f(x)=ax^2$ 比較，同學應該可以發現：

$y=ax^2$ 圖形的頂點為 $(0,0)$ 。(例如 $y=x^2$ 圖形頂點為 $(0,0)$)

$y=ax^2+k$ 圖形的頂點為 $(0,k)$ 。(例如 $y=\frac{1}{2}x^2-4$ 圖形頂點為 $(0,-4)$)

$y=ax^2$ 與 $y=ax^2+k$ 的對稱軸都是 $x=0$ 。

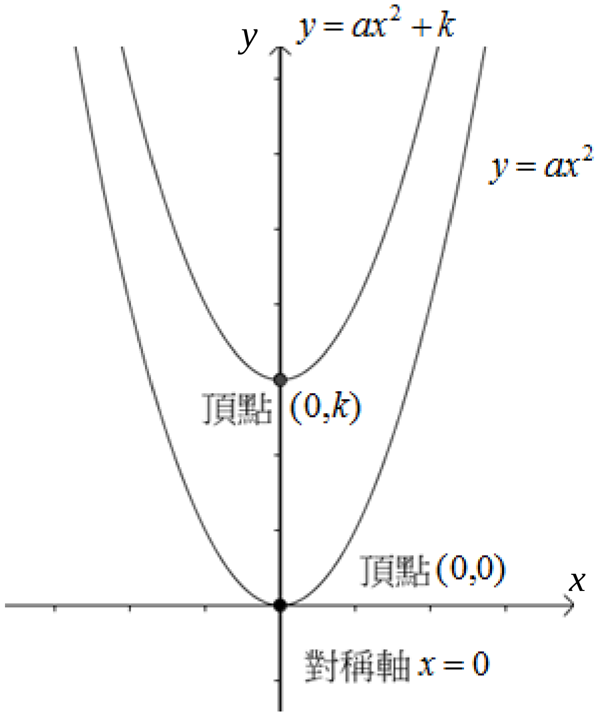


圖 9.1-13

接下來，讓我們討論形式為 $f(x)=a(x-h)^2$ 的函數圖形，如 $f(x)=(x-2)^2$ 。

要畫出 $f(x)=(x-2)^2$ 的函數圖形，一樣先找出符合 $y=f(x)=(x-2)^2$ 的點。

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9

表 9.1-7

然後描點畫出圖形：

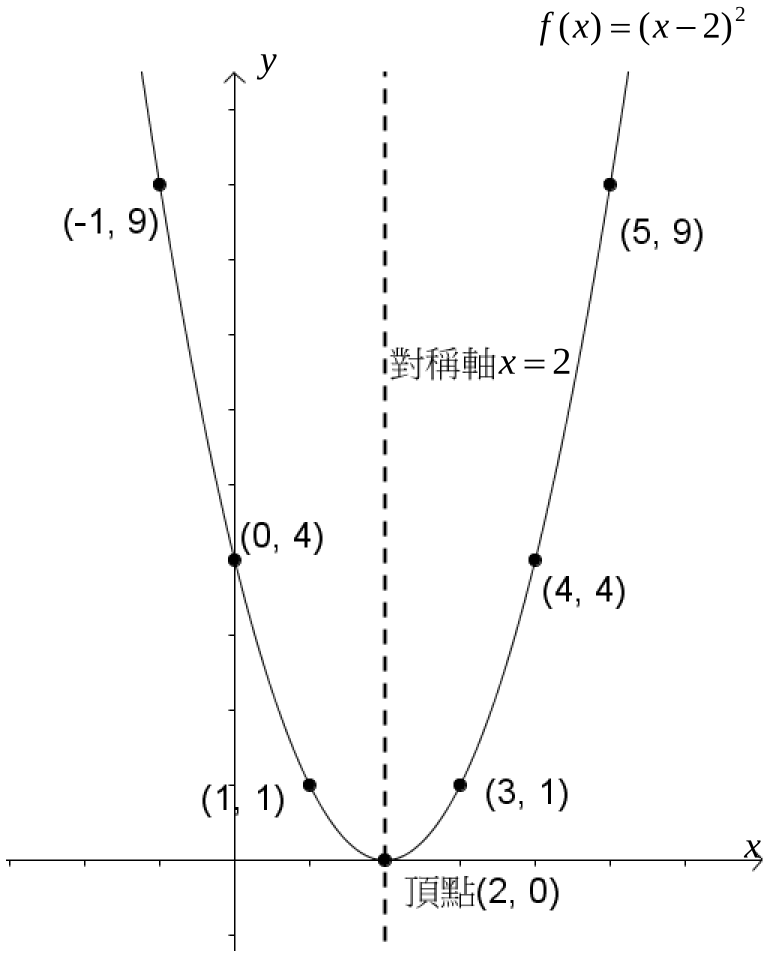


圖 9.1-14

圖 9.1-14 即為 $f(x)=(x-2)^2$ 的函數圖形，頂點為 $(2,0)$ ，對稱軸為 $x=2$ 。

例題 9.1-6

畫出 $f(x)=2(x-3)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

詳解：

先找出數個圖形上的點。

x	0	1	2	3	4	5	6
y	18	8	2	0	2	8	18

表 9.1-8

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-15。

頂點為 $(3,0)$，對稱軸為 $x=3$。

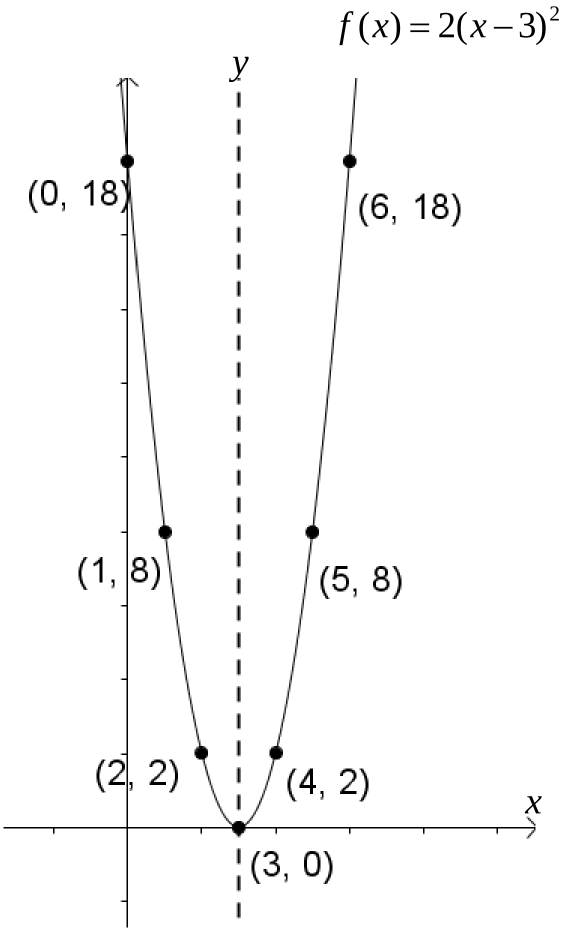
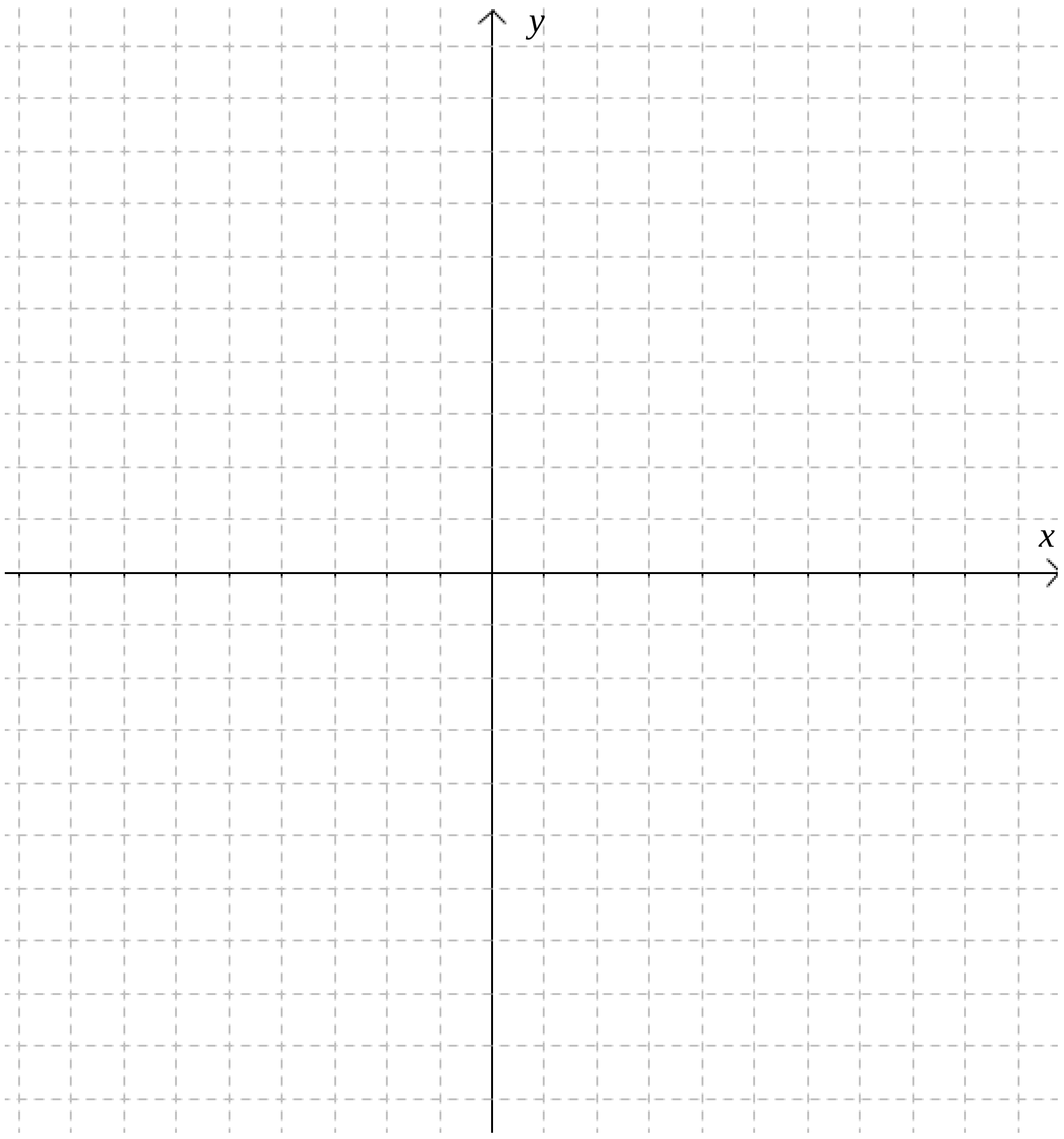


圖 9.1-15

【練習】9.1-6

畫出 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							



例題 9.1-7

畫出 $f(x)=\frac{3}{2}(x+4)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

詳解：

先找出數個圖形上的點。

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	$13\frac{1}{2}$	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	$13\frac{1}{2}$

表 9.1-9

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-16。

頂點為 $(-4,0)$，對稱軸為 $x=-4$。

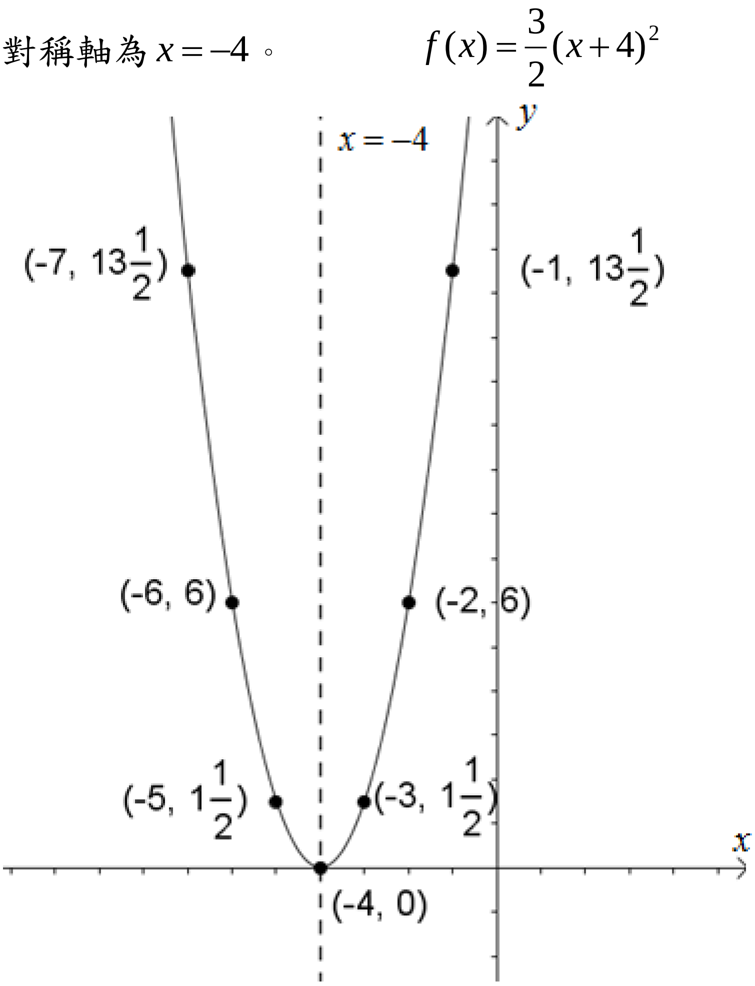
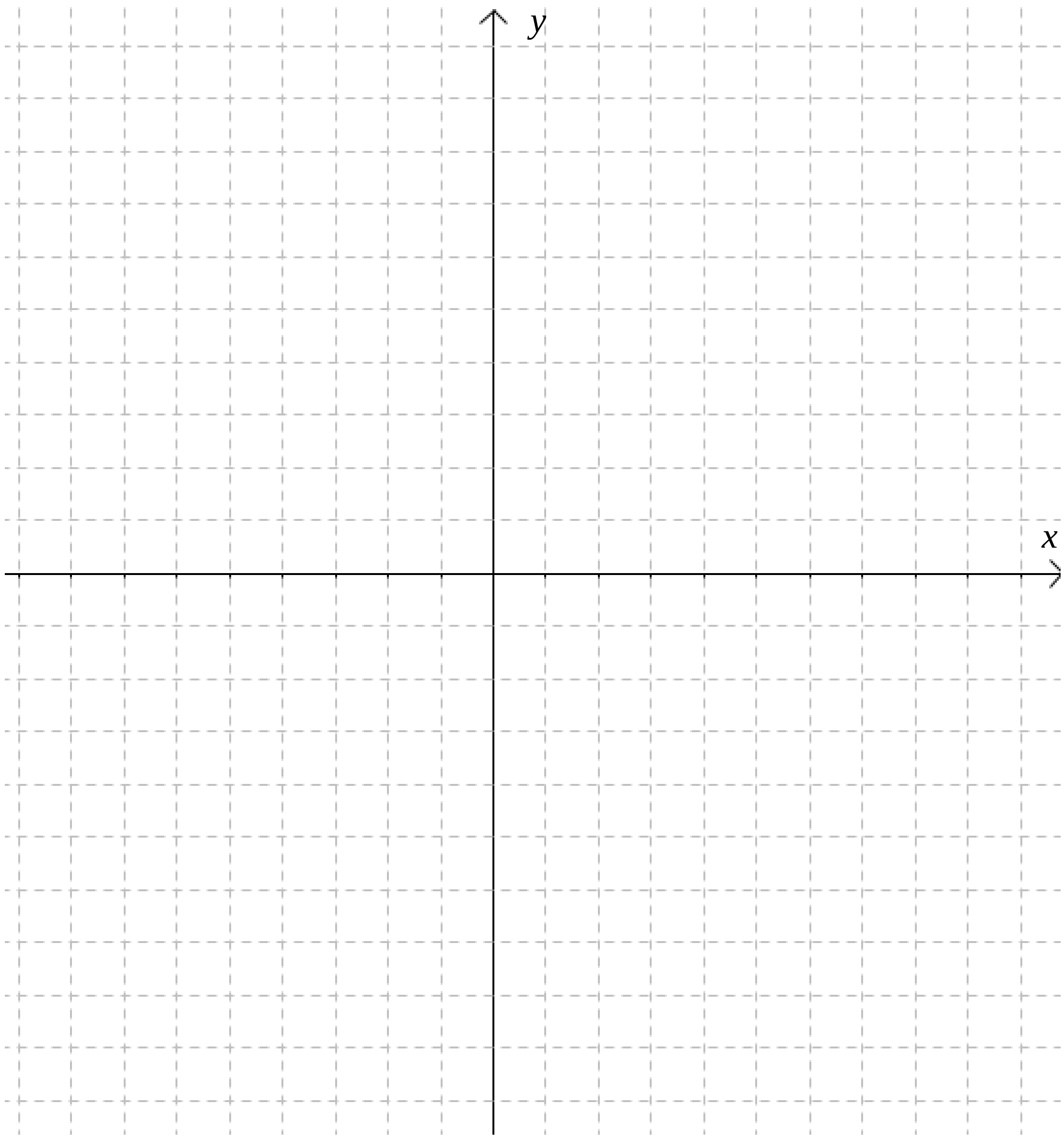


圖 9.1-16

【練習】9.1-7

畫出 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y							



我們畫出了數個形式為 $f(x)=a(x-h)^2$ 的函數圖形。若與 $f(x)=ax^2$ 比較，同學應該可以發現：

$f(x)=ax^2$ 的函數圖形頂點為 $(0,0)$。(例如 $f(x)=x^2$ 的函數圖形頂點為 $(0,0)$)

$f(x)=a(x-h)^2$ 的函數圖形頂點為 $(h,0)$。(例如 $f(x)=2(x-3)^2$ 的函數圖形頂點為 $(3,0)$)

$f(x)=ax^2$ 的函數圖形對稱軸是 $x=0$， $f(x)=a(x-h)^2$ 的函數圖形對稱軸是 $x=h$。

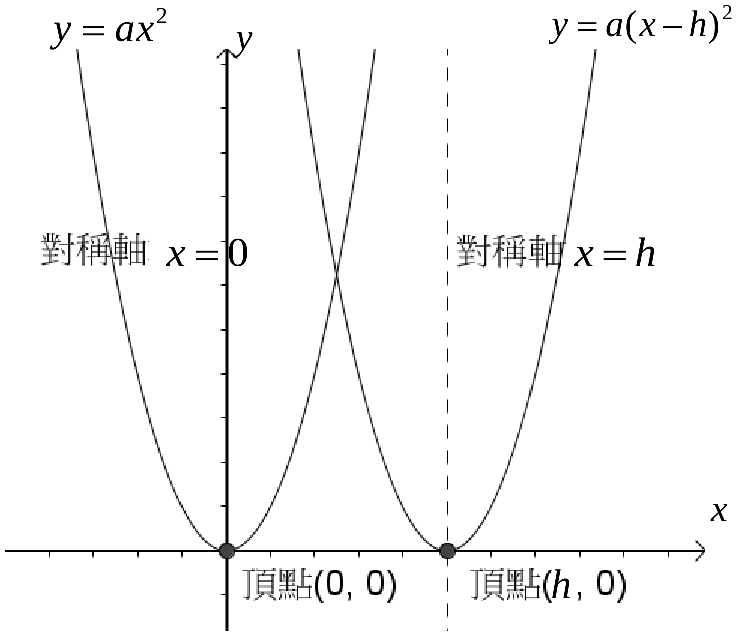


圖 9.1-17

學習了二次函數 $f(x)=ax^2+k$ 與 $f(x)=a(x-h)^2$ 的函數圖形之後，接著我們要將這兩種函數綜合起來，也就是形式為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 。

我們來試著畫畫看 $y=f(x)=(x-2)^2+3$ 的圖形：

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	7	4	3	4	7	12

表 9.1-10

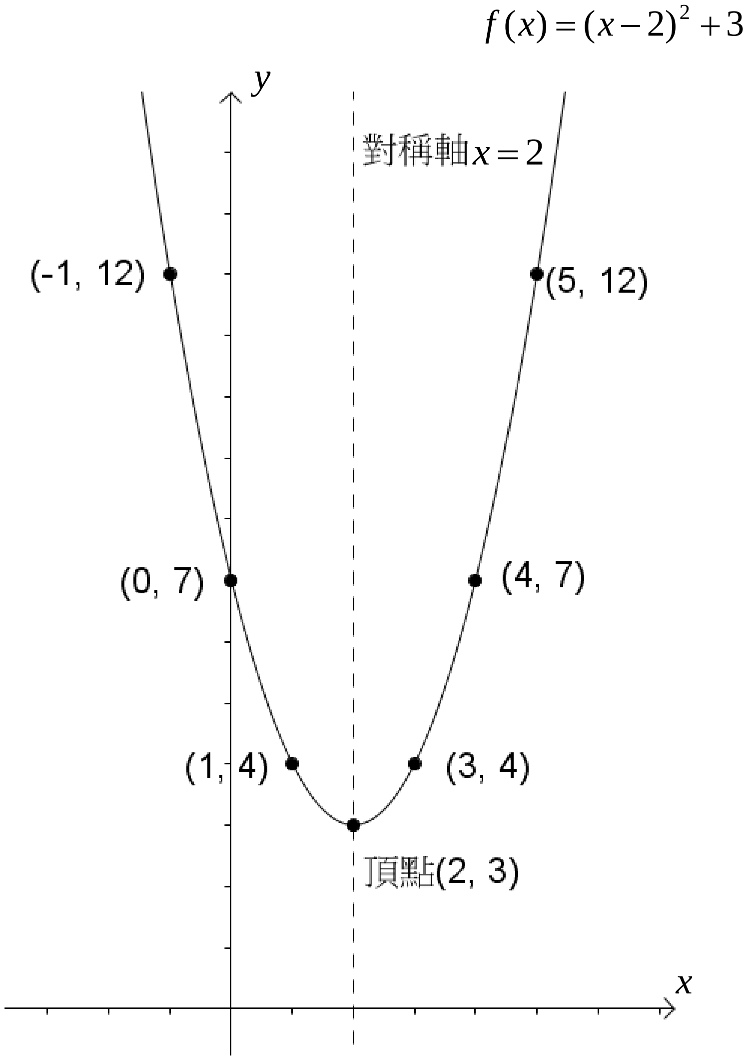


圖 9.1-18

$f(x)=(x-2)^2+3$ 的函數圖形頂點是 $(2,3)$ ，對稱軸是 $x=2$ 。

例題 9.1-8

畫出 $f(x)=4(x+2)^2-3$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

詳解：

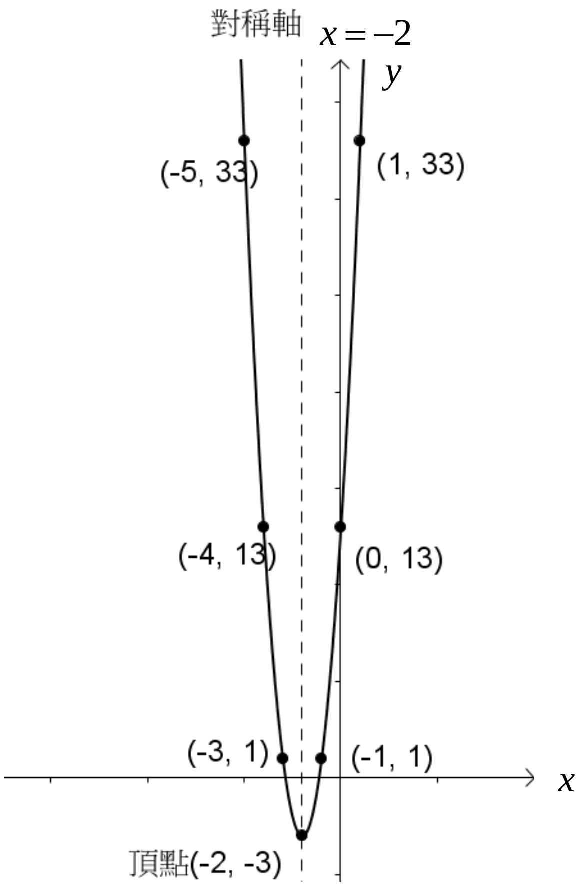
先找出數個圖形上的點。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	33	13	1	-3	1	13	33

表 9.1-11

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-19。

頂點為 $(-2,-3)$，對稱軸為 $x=-2$。



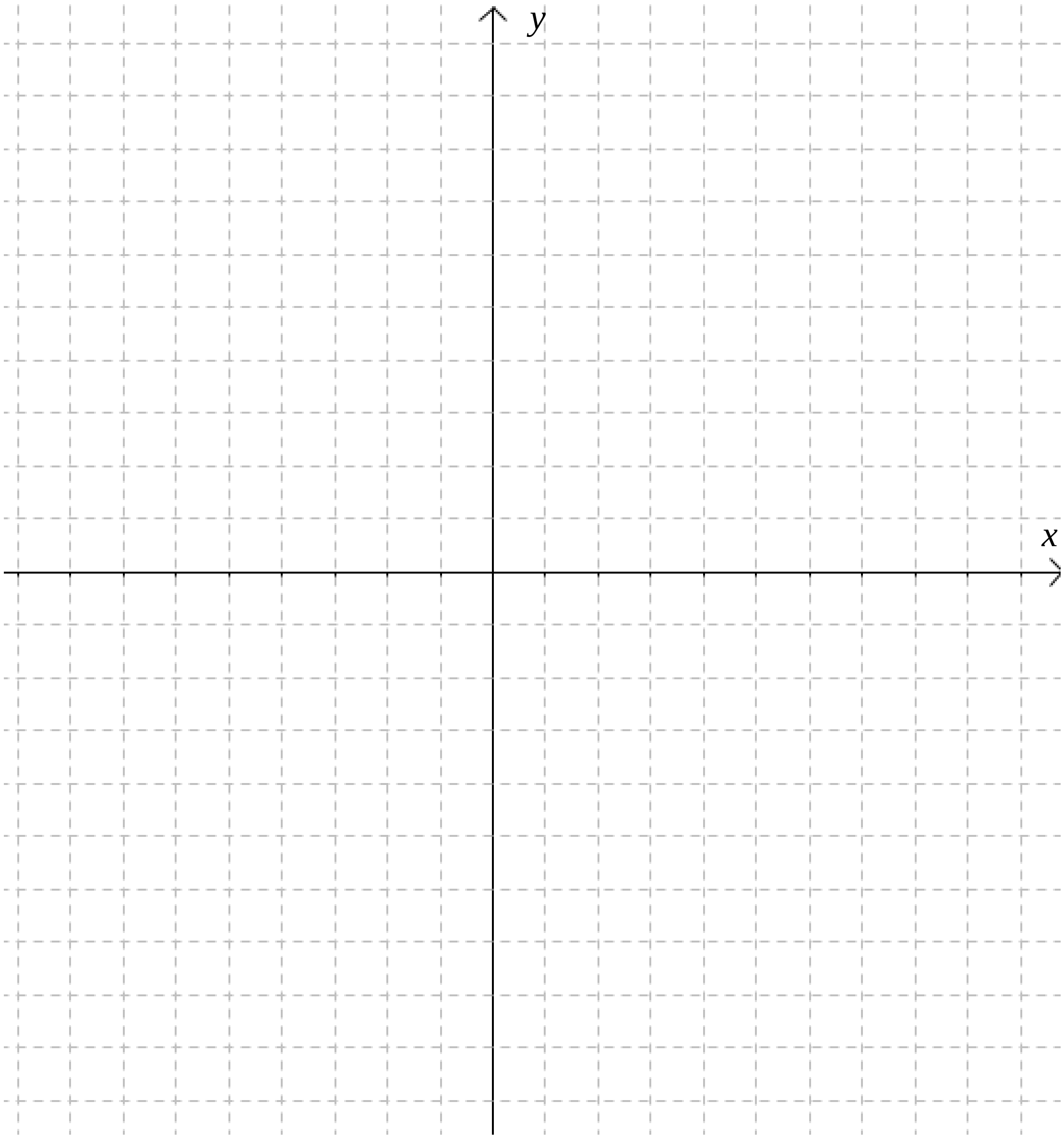
$$f(x)=4(x+2)^2-3$$

圖 9.1-19

【練習】9.1-8

畫出 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-1$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y							



例題 9.1-9

畫出 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-4)^2+2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

詳解：

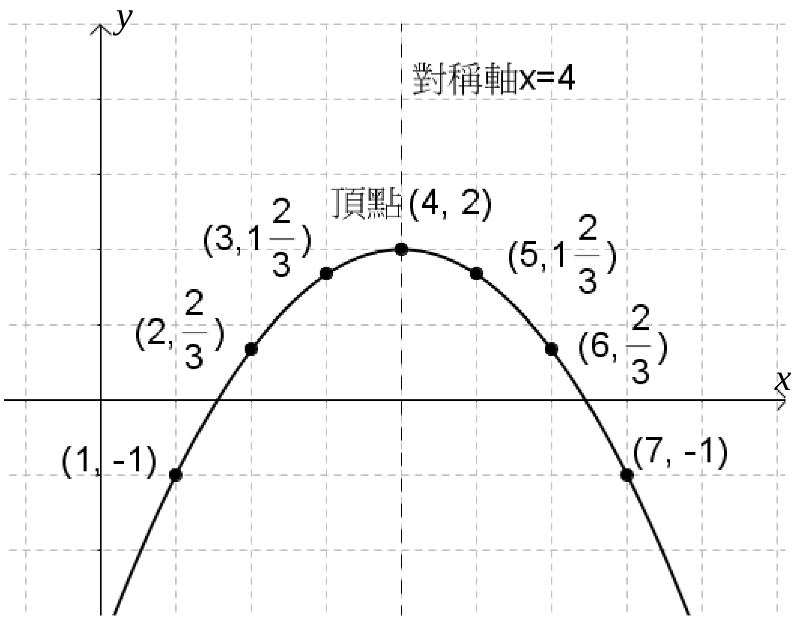
先找出數個圖形上的點。

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-1	$\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2	$1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1

表 9.1-12

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-20。

頂點為 $(4,2)$ ，對稱軸為 $x=4$ 。



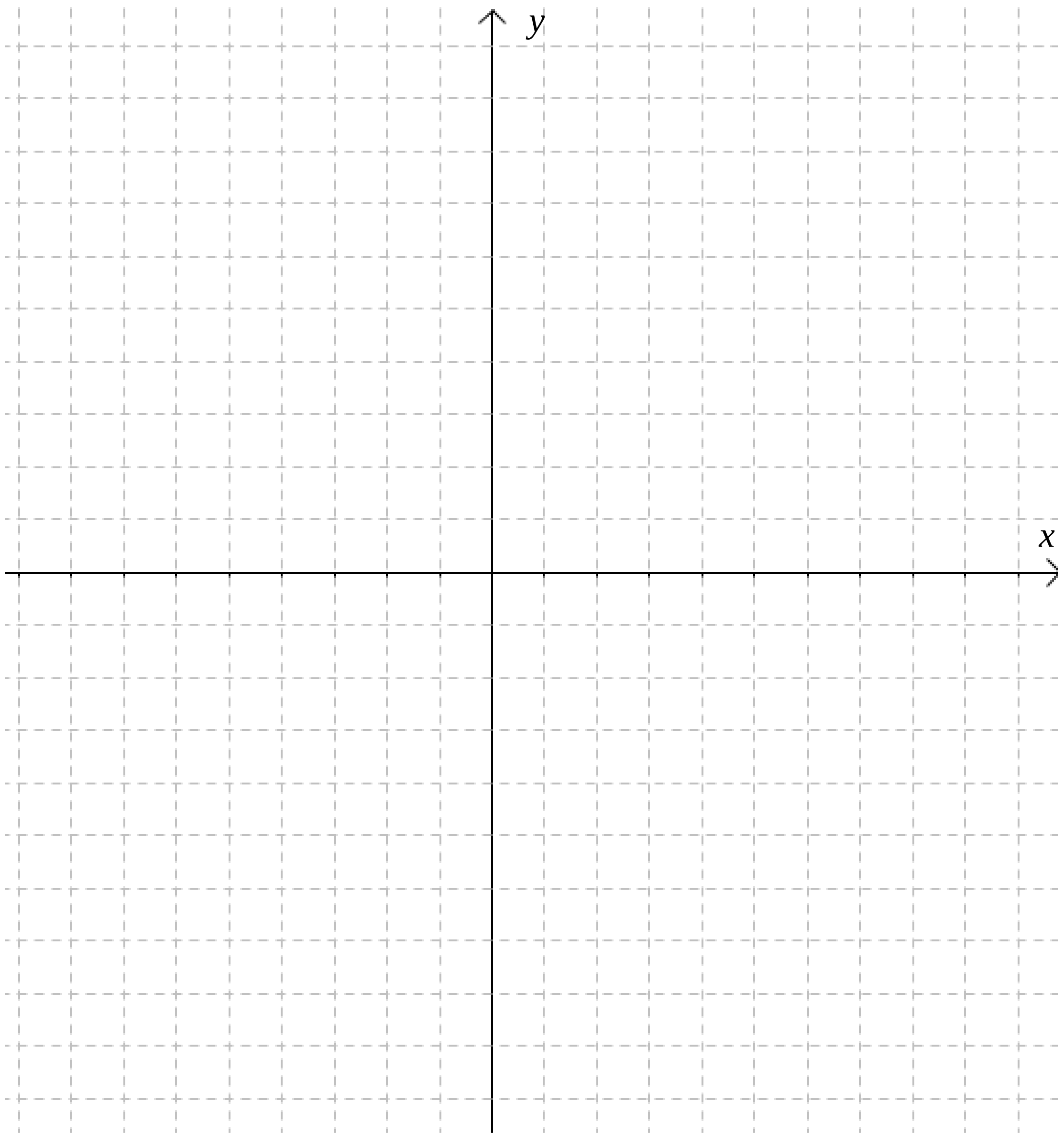
$f(x)=-\frac{1}{3}(x-4)^2+2$

圖 9.1-20

【練習】9.1-9

畫出 $f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2+3$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y							



我們已經畫了數個形式為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形，同學應該可以發現到：

1. 頂點為 (h,k) 。
2. 對稱軸為 $x=h$ 。
3. $a>0$ 則開口向上； $a<0$ 則開口向下。

利用這些性質可以簡單地判斷函數圖形的大略樣貌。

例題 9.1-10

求函數 $f(x)=7(x-5)^2+16$ 其函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

詳解：

與 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 對照，得 $h=5$ 、 $k=16$ 、 $a=7>0$ 。

因此頂點為 $(5,16)$ 、對稱軸為 $x=5$ 、開口向上。

【練習】9.1-10

求函數 $f(x)=\dfrac{1}{16}(x-3)^2-13$ 其函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

例題 9.1-11

求函數 $f(x)=-4(x+3)^2+2$ 其函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

詳解：

與 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 對照，得 $h=-3$ 、 $k=2$ 、 $a=-4<0$ 。

因此頂點為 $(-3,2)$ 、對稱軸為 $x=-3$ 、開口向下。

【練習】9.1-11

求函數 $f(x)=-\dfrac{1}{5}(x+6)^2-4$ 其函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

現在我們很清楚二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形性質了，但若是函數形式為 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，又該如何處理呢？我們可以利用以前學過的配方法，將 $f(x)=ax^2+bx+c$ 轉換為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

例如 $f(x)=x^2+4x+8$ ：

$f(x)\quad =x^2+4x+8$

$=x^2+4x+4-4+8$ (加上中間項 $4x$ 係數一半的平方以湊完全平方，再 -4 維持等式)

$=(x+2)^2-4+8$ (化為完全平方)

$=(x+2)^2+4$

於是我們得到 $f(x)=x^2+4x+8=(x+2)^2+4$ 。

因此 $f(x)=x^2+4x+8$ 的函數圖形頂點是 $(-2,4)$ 、對稱軸是 $x=-2$ 、開口向上。

例題 9.1-12

寫出 $f(x)=x^2+6x-18$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

詳解：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2+6x-18 \\
&= x^2+6x+9-9-18 \text{（加上中間項 } 6x \text{ 係數一半的平方以湊完全平方，再 } -4 \text{ 維持等式）} \\
&= (x+3)^2-9-18 \text{（化為完全平方）} \\
&= (x+3)^2-27
\end{aligned}
$$

頂點為 $(-3,-27)$、對稱軸為 $x=-3$、開口向上。

【練習】9.1-12

寫出 $f(x)=x^2+4x-4$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

例題 9.1-13

寫出 $f(x)=-2x^2+8x+1$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

詳解：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2+8x+1 \\
&= -2(x^2-4x)+1 && \text{（提出 } x^2 \text{ 項的係數）} \\
&= -2(x^2-4x+4-4)+1 && \text{（括號內加上中間項 } -4x \text{ 係數一半的平方以湊完全平方，再 } -4 \text{ 維持等式）} \\
&= -2(x^2-4x+4)+8+1 && \text{（將} -4 \text{ 移到括號外）} \\
&= -2(x-2)^2+9 && \text{（括號內化為完全平方）}
\end{aligned}
$$

頂點為 $(2,9)$、對稱軸為 $x=2$、開口向下。

【練習】9.1-13

寫出 $f(x)=-3x^2+6x-5$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

例題 9.1-14

在直角座標上畫出 $f(x)=2x^2-12x+20$ 的函數圖形。

詳解：

想畫 $f(x)=2x^2-12x+20$ 的圖形，我們先利用配方法將函數化為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式，找出頂點後可讓作圖較容易。

$f(x)=2x^2-12x+20$

$=2(x^2-6x)+20$　　（提出 x^2 項的係數）

$=2(x^2-6x+9-9)+20$　　（括號內加上中間項 $-6x$ 係數一半的平方以湊完全平方，再 -9 維持等式）

$=2(x^2-6x+9)-18+20$　　（將－9 移到括號外）

$=2(x-3)^2+2$　　（括號內化為完全平方）

頂點為 $(3,2)$、對稱軸為 $x=3$、開口向上。

找出圖形上的點：

x	0	1	2	3	4	5	6
y	20	10	4	2	4	10	20

表 9.1-13

將符合的點描在直角座標上，再用平滑的曲線連起來，如圖 9.1-21。

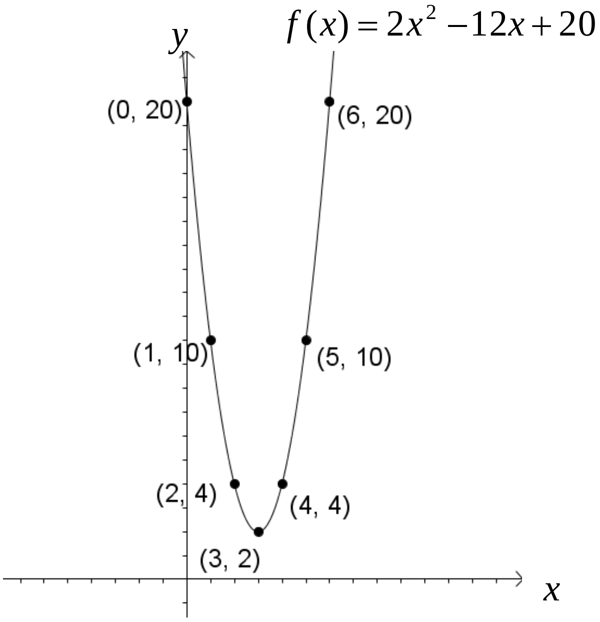
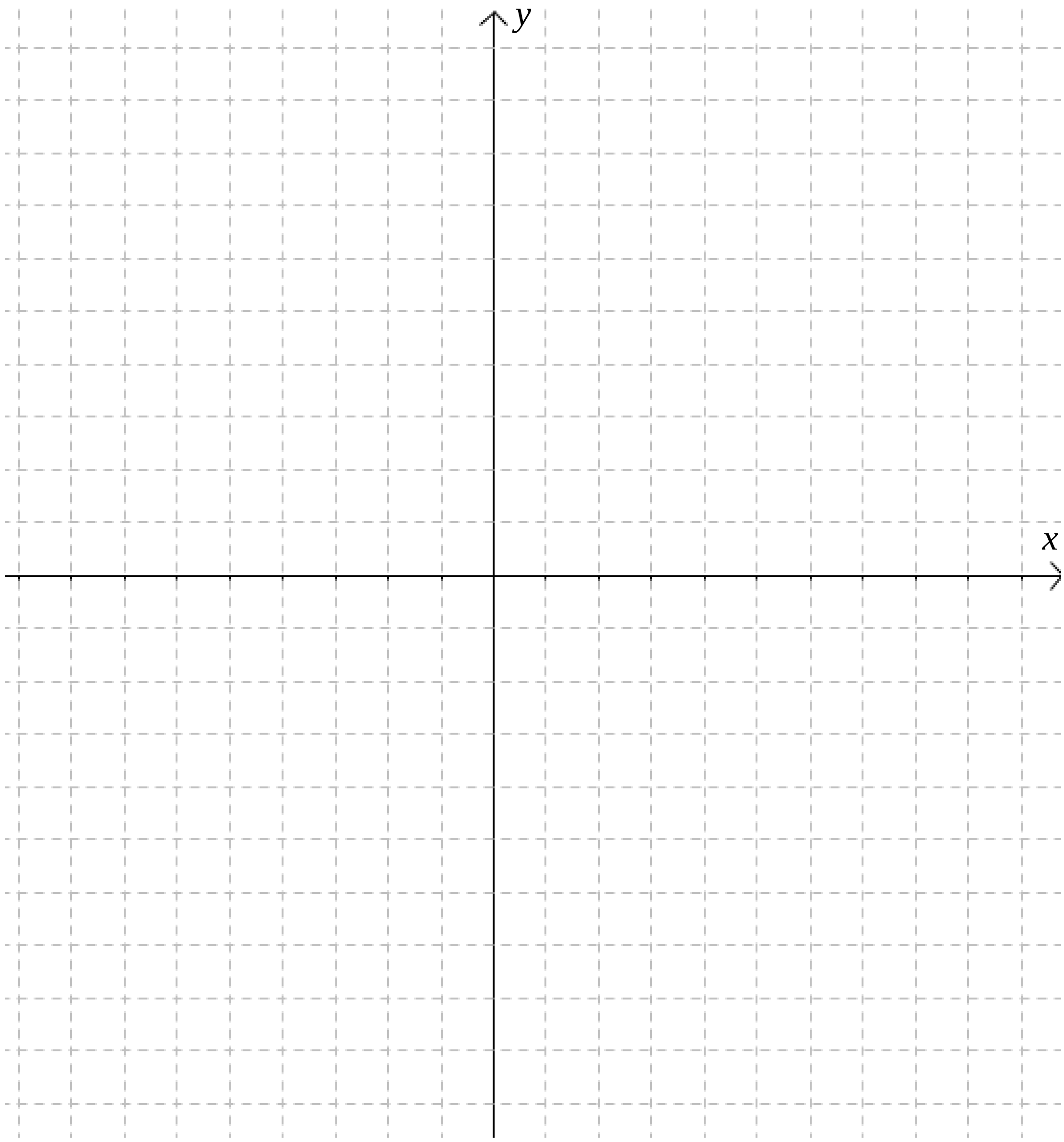


圖 9.1-21

【練習】9.1-14

在直角座標上畫出 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$ 的函數圖形。



例題 9.1-15

求 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+6$ 其函數圖形的頂點座標。

詳解：

利用配方法將 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+6$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}x^2+x+6 \\
&= \frac{1}{2}(x^2+2x)+6 && \text{（提出 } x^2 \text{ 項的係數）} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+2x+1-1)+6 && \text{（括號內＋1 以湊完全平方，再－1 維持等式）} \\
&= \frac{1}{2}(x^2+2x+1)-\frac{1}{2}+6 && \text{（將－1 移到括號外）} \\
&= \frac{1}{2}(x+1)^2+5\frac{1}{2} && \text{（括號內化為完全平方）}
\end{aligned}
$$

得頂點為 $(-1,5\frac{1}{2})$。

【練習】9.1-15

求 $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+2x+2$ 其函數圖形的頂點座標。

本節我們已畫了 $f(x)=ax^2$ 、 $f(x)=ax^2+k$ 、 $f(x)=a(x-h)^2$ 、 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 、 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數圖形，這邊來做個整理：

函數	頂點	對稱軸	開口方向
$f(x)=ax^2+k$	$(0,0)$	$x=0$	$a>0$ 則開口向上 $a<0$ 則開口向下
$f(x)=ax^2+k$	$(0,k)$	$x=0$	$a>0$ 則開口向上 $a<0$ 則開口向下
$f(x)=a(x-h)^2$	$(h,0)$	$x=h$	$a>0$ 則開口向上 $a<0$ 則開口向下
$f(x)=a(x-h)^2+k$	(h,k)	$x=h$	$a>0$ 則開口向上 $a<0$ 則開口向下
$f(x)=ax^2+bx+c$	將方程式利用配方法化為 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式再判斷。		$a>0$ 則開口向上 $a<0$ 則開口向下

表 9.1-14

接著我們來看看如何從函數圖形的已知條件，求出二次函數：

例題 9.1-16

直角座標上，已知某二次函數的函數圖形頂點為$(1,1)$，且通過點$(2,2)$，試求此二次函數。

詳解：

因為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 函數圖形的頂點為(h,k)，所以頂點為$(1,1)$的二次函數，我們可以列成 $f(x)=a(x-1)^2+1$。

將點$(2,2)$代入 $y=f(x)=a(x-1)^2+1$，以求出 a：

$$y=f(x)=a(x-1)^2+1$$

$$2=a(2-1)^2+1$$

$$2=a+1$$

$$a=1$$

因此題目所求的二次函數為 $f(x)=(x-1)^2+1$

同學可以將函數圖形畫出來看看，是否符合題意。

【練習】9.1-16

直角座標上，已知某二次函數的函數圖形頂點為$(-1,3)$，且通過點$(1,7)$，試求此二次函數。

例題 9.1-17

直角座標上，已知某二次函數其函數圖形對稱軸為 $x=-1$，且通過點 $(-2,1)$ 與 $(1,7)$ ，試求此二次函數。

詳解：

因為 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形對稱軸為 $x=h$，所以頂點為對稱軸為 $x=-1$ 的函數，我們可以列成 $f(x)=a(x-(-1))^2+k=a(x+1)^2+k$ 。

將點 $(-2,1)$ 代入 $y=f(x)=a(x+1)^2+k$ 得 $1=a(-2+1)^2+k$ ，化簡得 $a+k=1$

將點 $(1,7)$ 代入 $y=f(x)=a(x+1)^2+k$ 得 $7=a(1+1)^2+k$ ，化簡得 $4a+k=7$

寫成聯立方程式：

$$\begin{cases} a+k=1 & ......(1) \\ 4a+k=7 & ......(2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$ 得 $3a=6 \to a=2$

$a=2$ 代入(1)得 $k=-1$

因此題目所求二次函數為 $f(x)=2(x+1)^2-1$

同學可以將函數圖形畫出來，檢視是否符合題意。

【練習】9.1-17

直角座標上，已知某二次函數其函數圖形對稱軸為 $x=-3$ ，且通過點 $(-5,6)$ 與 $(-2,0)$ ，試求此二次函數。

函數的根與圖形的關係

瞭解了二次函數的圖形後，接著我們要討論方程式的解、函數的根與圖形的關係：

方程式的解，為符合方程式的未知數之值。例如 $x^2-2x-15=0$ 的解為 5 、 -3 。

函數的根，為函數值 $f(x)=0$ 時的 x 之值。例如 $f(x)=x^2-2x-15$ 的根為 5 、 -3 。

一般來說，相同方程式的解與函數的根也會是相同的。若我們從直角座標圖形來看，求 $ax^2+bx+c=0$ 的解就相當於找函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 其函數圖形與 x 軸交點之 x 座標。例如函數 $f(x)=x^2-2x-15$ 其函數圖形與 x 軸的交點為 $(5,0)$ 、 $(-3,0)$ ，交點的 x 座標即為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解。如圖 9.1-22。

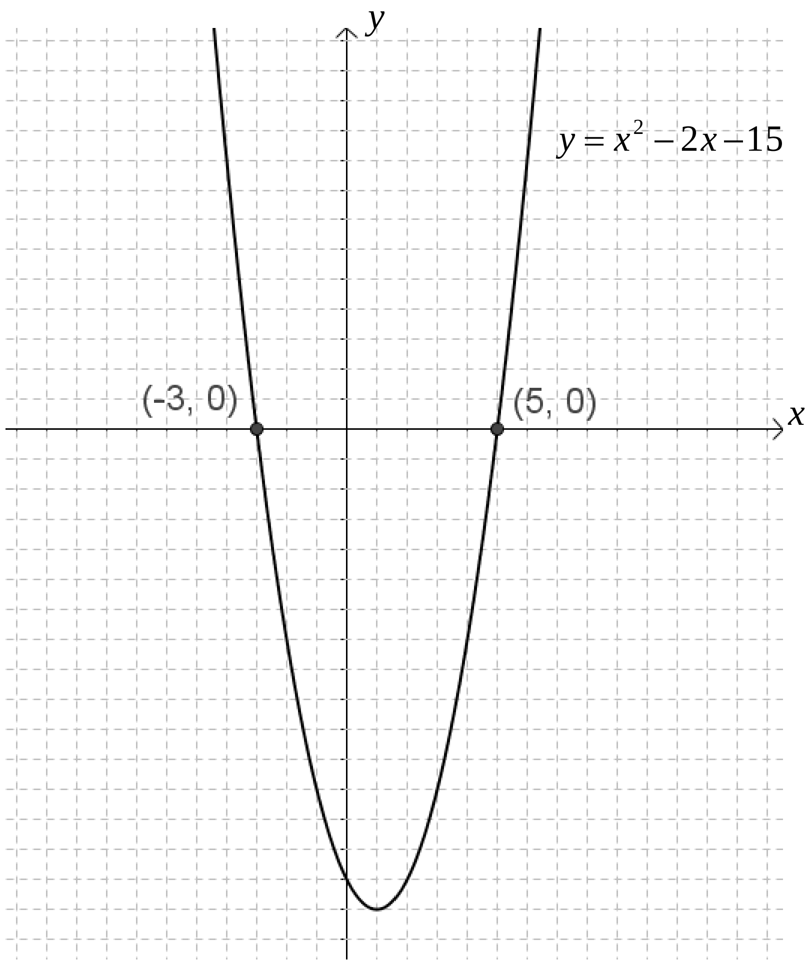


圖 9.1-22

由圖 9.1-22 也可看出， $x^2-2x-15=0$ 有兩相異解，而 $f(x)=x^2-2x-15$ 函數圖形與 x 軸有兩相異交點。

接著我們來看看方程式$x^2-6x+9=0$，利用乘法公式可得$(x-3)^2=0$，因此解為3(重根)。對函數$f(x)=x^2-6x+9$來說，3也是其函數圖形與x軸交點之x座標。如圖9.1-23。

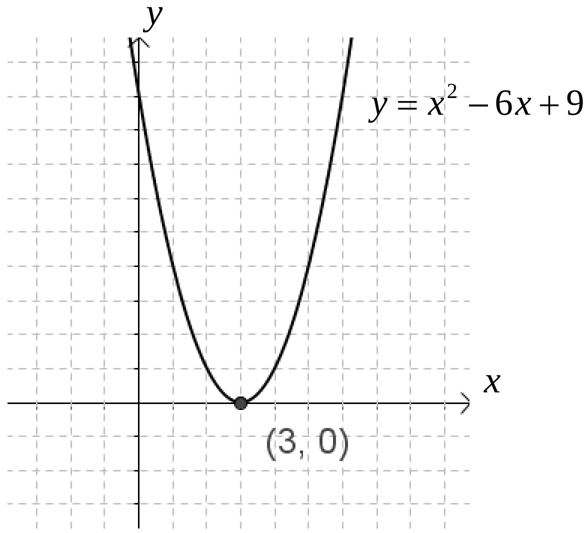


圖 9.1-23

由圖 9.1-23 可知，$x^2-6x+9=0$有重根，而$f(x)=x^2-6x+9$的函數圖形與x軸只有一交點。

最後我們來看看方程式$x^2+x+2=0$，因為判別式$1^2-4\times1\times2=-7<0$，因此無解。對函數$f(x)=x^2+x+2$來說，其函數圖形與x軸無交點。如圖9.1-24。

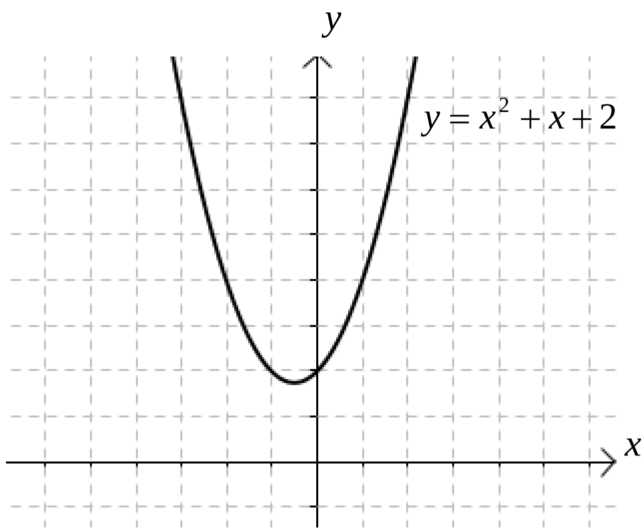


圖 9.1-24

由圖 9.1-24 可知，$x^2+x+2=0$ 無解，而 $f(x)=x^2+x+2$ 的函數圖形與 x 軸無交點。

我們將以上討論做個整理，對於方程式 $ax^2+bx+c=0$：

判別式	解的種類	$f(x)=ax^2+bx+c$ 函數圖形與 x 軸交點
$b^2-4ac>0$	兩相異解	兩相異交點
$b^2-4ac=0$	重根	一交點
$b^2-4ac<0$	無解	無交點

表 9.1-15

例題 9.1-18

判斷 $f(x)=2x^2+8x+8$ 的函數圖形與 x 軸的交點數量。

詳解：

利用判別式，先判斷 $2x^2+8x+8=0$ 的解的種類。

$8^2-4\times2\times8=0$

因此方程式 $2x^2+8x+8=0$ 有重根。根據表 9.1-15，$f(x)=2x^2+8x+8$ 的函數圖形與 x 軸有一交點。

【練習】9.1-18

判斷 $f(x)=3x^2+5x+9$ 的函數圖形與 x 軸的交點數量。

9.1 節 習題

習題 9.1-1

畫出 $f(x)=2x^2$ 的函數圖形。

習題 9.1-2

(1)找出 $f(x)=3x^2$ 函數圖形的對稱軸。

(2)畫出 $f(x)=3x^2$ 的函數圖形。

習題 9.1-3

寫出下列各函數圖形的開口方向：

(1) $f(x)=5x^2$ (2) $f(x)=-5x^2$ (3) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

習題 9.1-4

畫出 $f(x)=x^2+1$ 的函數圖形，並指出頂點。

習題 9.1-5

畫出 $f(x) = 2x^2 - 1$的函數圖形，並指出頂點。

習題 9.1-6

畫出 $f(x) = 3(x-2)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

習題 9.1-7

畫出 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ 的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

習題 9.1-8

畫出 $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

習題 9.1-9

畫出 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$的函數圖形，並指出頂點與對稱軸。

習題 9.1-10

寫出 $f(x)=6(x-1)^2+5$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

習題 9.1-11

寫出 $f(x)=-\frac{1}{3}(x+1)^2+1$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

習題 9.1-12

寫出 $f(x)=x^2+2x-5$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

習題 9.1-13

寫出 $f(x)=-4x^2+8x+1$ 函數圖形的頂點、對稱軸與開口方向。

習題 9.1-14

在直角座標上畫出 $f(x)=3x^2+6x+1$ 的函數圖形。

習題 9.1-15

求 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+2x+4$ 函數圖形的頂點座標。

習題 9.1-16

判斷 $f(x)=-x^2+2x+1$ 函數圖形與 x 軸的交點數量。

習題 9.1-17

直角座標上，已知某二次函數圖形頂點為 $(1,2)$，且通過點 $(4,11)$，試求此二次函數。

習題 9.1-18

直角座標上，已知某二次函數圖形對稱軸為 $x=2$，且通過點 $(3,2)$ 與 $(5,-6)$，試求此二次函數。

9.2 節 二次函數圖形的移動

在本節中，我們將討論當二次函數圖形改變時，函數會如何變化。

在 9.1 節時我們畫過 $f(x)=x^2+1$ 的函數圖形，這裡我們與 $f(x)=x^2$ 做比較：

為了簡化運算，我們先比較拋物線方程式 $y=x^2+1$ 與 $y=x^2$ 。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y=x^2+1$	10 =9+1	5 =4+1	2 =1+1	1 =0+1	2 =1+1	5 =4+1	10 =9+1

表 9.2-1

可以看出 x 座標相同時， $y=x^2+1$ 圖形的 y 座標是 $y=x^2$ 圖形的 y 座標加 1。

將兩個圖形畫在同一個直角座標上比較：

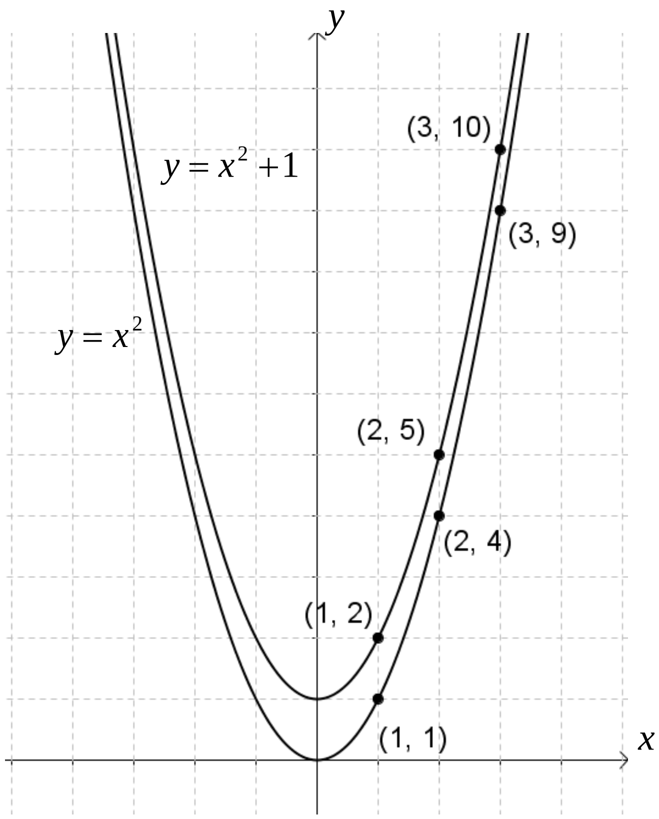


圖 9.2-1

如圖 9.2-1， $y=x^2+1$ 的圖形，可以看成是 $y=x^2$ 往上移動 1 單位。

我們再看一個例子，比較$y=\frac{1}{2}x^2-4$與$y=\frac{1}{2}x^2$的圖形：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{2}x^2-4$	$\frac{1}{2}$ $=4\frac{1}{2}-4$	-2 $=2-4$	$-3\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}-4$	-4 $=0-4$	$-3\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{2}-4$	-2 $=2-4$	$\frac{1}{2}$ $=4\frac{1}{2}-4$

表 9.2-2

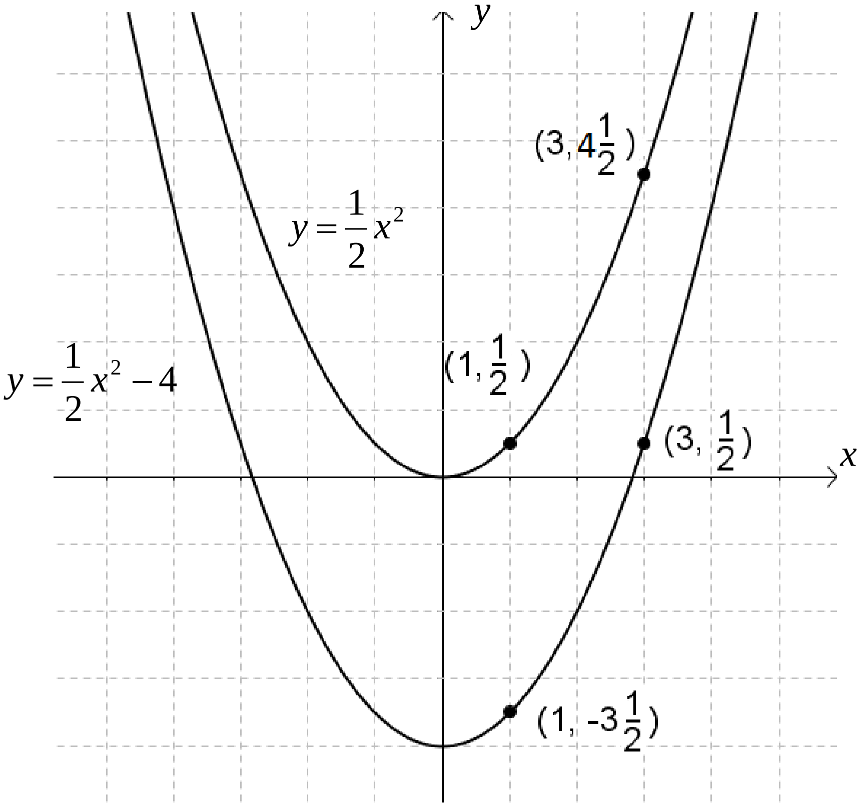


圖 9.2-2

如圖 9.2-2，$y=\frac{1}{2}x^2-4$的圖形，可以看成是$y=\frac{1}{2}x^2$往下移動 4 單位。

事實上，$y=ax^2+k$的圖形，相當於$y=ax^2$往上移動k單位。(若$k<0$則為往下移動$|k|$單位)

因此$y=x^2+1$的圖形是$y=x^2$往上移動 1 單位，$y=\frac{1}{2}x^2-4$的圖形是$y=\frac{1}{2}x^2$往下移動 4 單位。

我們再接著看下一種形式，比較 $y=(x-2)^2$ 與 $y=x^2$ ：

y	9	4	1	0	1	4	9
x （$y=x^2$）	-3	-2	-1	0	1	2	3
x （$y=(x-2)^2$）	-1 =-3+2	0 =-2+2	1 =-1+2	2 =0+2	3 =1+2	4 =2+2	5 =3+2

表 9.2-3

可以看出 y 座標相同時， $y=(x-2)^2$ 圖形的 y 座標是 $y=x^2$ 圖形的 x 座標加 2。

將兩個圖形畫在同一個直角座標上比較：

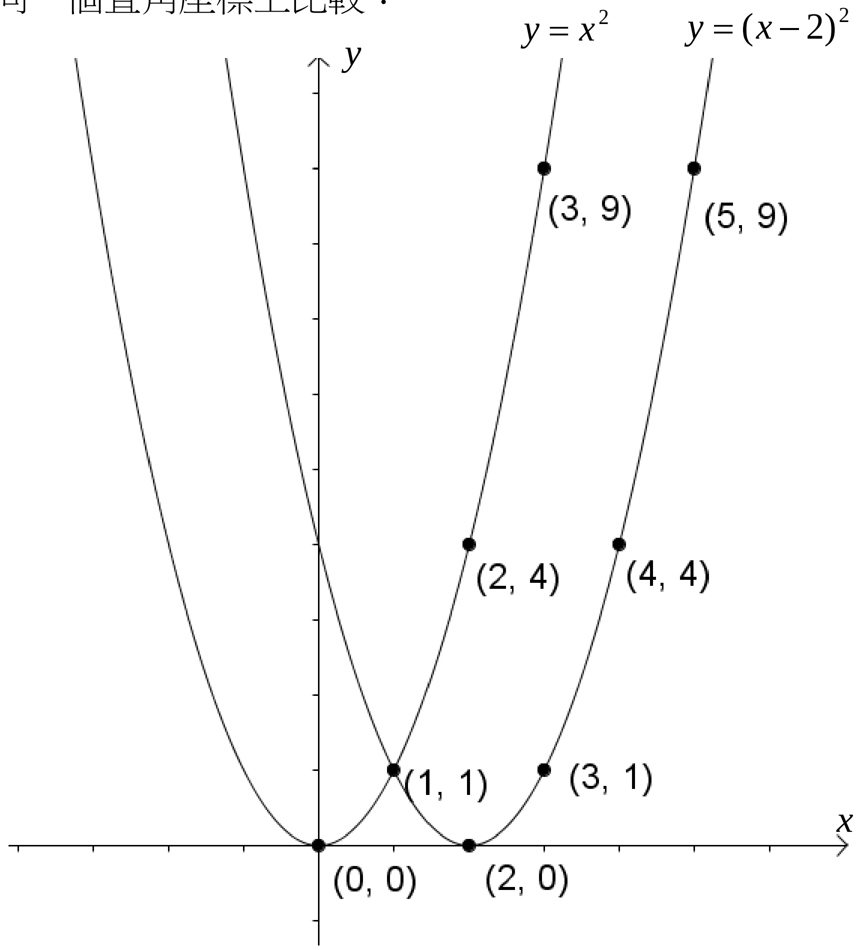


圖 9.2-3

由圖 9.2-3 可知，$y=(x-2)^2$ 的圖形即是 $y=x^2$ 的圖形往右移動 2 單位。

再比較看看 $y=\frac{3}{2}(x+4)^2$ 與 $y=\frac{3}{2}x^2$ ：

y	$13\frac{1}{2}$	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	$13\frac{1}{2}$
x ($y=\frac{3}{2}x^2$)	-3	-2	-1	0	1	2	3
x ($y=\frac{3}{2}(x+4)^2$)	-7 =-3－4	-6 =-2－4	-5 =-1－4	-4 =0－4	-3 =1－4	-2 =2－4	-1 =3－4

表 9.2-4

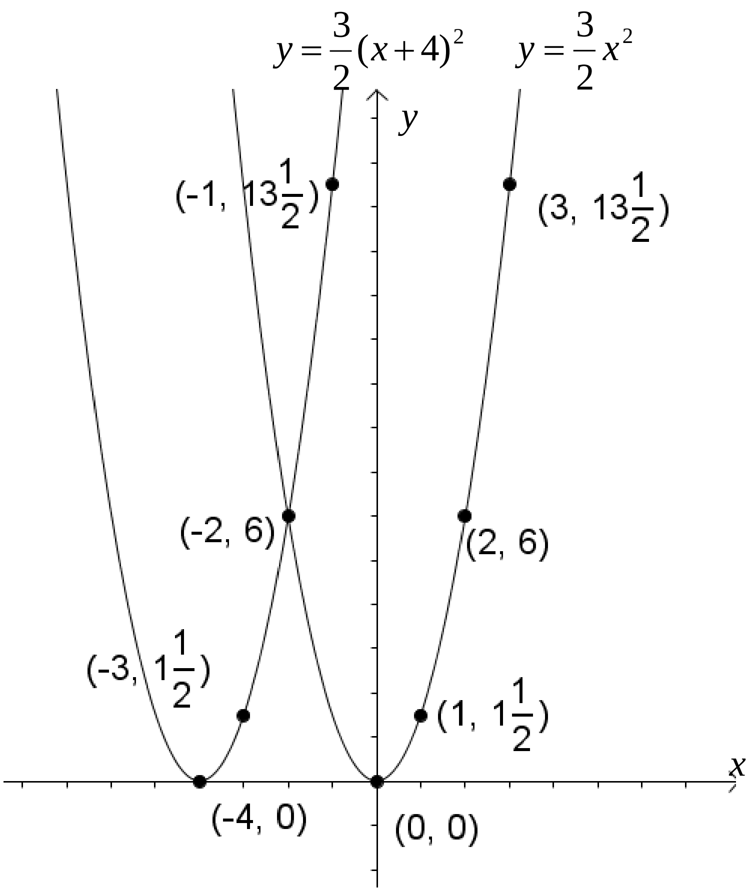


圖 9.2-4

可以看出 $y=\frac{3}{2}(x+4)^2$ 的圖形相當於 $y=\frac{3}{2}x^2$ 的圖形往左移動 4 單位。

事實上，$y=a(x-h)^2$ 的函數圖形相當於 $y=ax^2$ 往右移動 h 單位。(若 $h<0$ 則為往左移動 $|h|$ 單位)

最後我們比較 $y=(x-2)^2+3$ 與 $y=x^2$ ：

$y=x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y=(x-2)^2+3$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	7	4	3	4	7	12

表 9.2-5

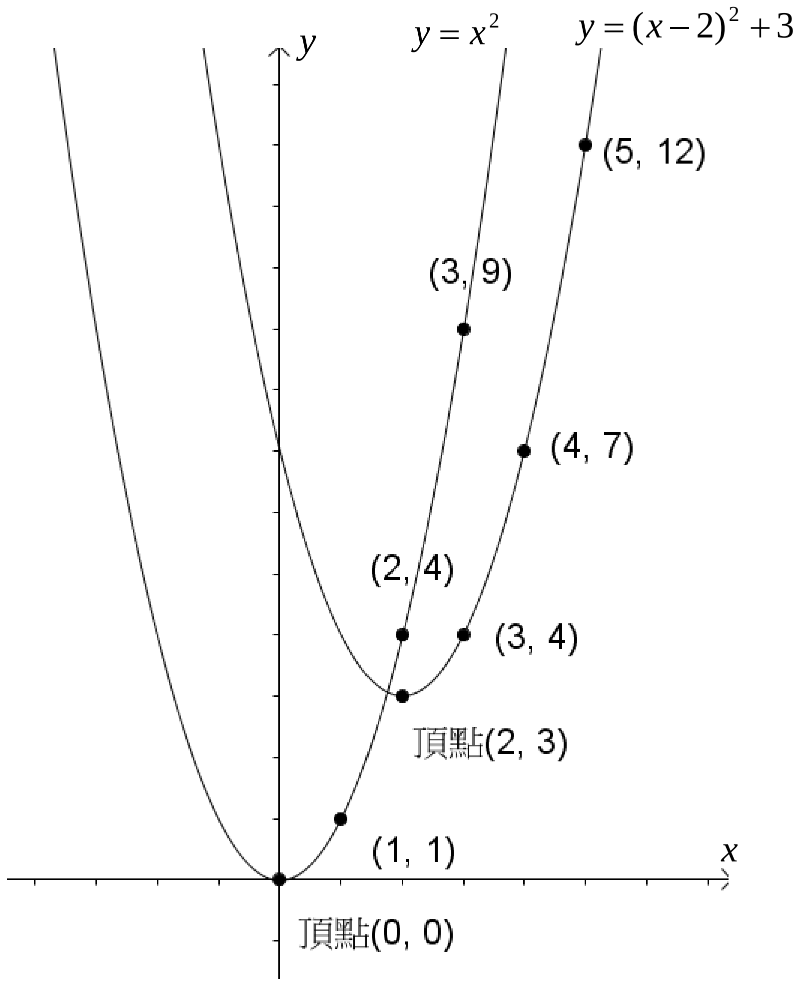


圖 9.2-5

從頂點來看，$y=x^2$的頂點是$(0,0)$，$y=(x-2)^2+3$的頂點是$(2,3)$，相當於 x 座標增加了 2 單位，y 座標增加了 3 單位。除了頂點以外，其他的點也有同樣關係：

$y=x^2$ 上的點	$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,4)$	$(3,9)$
$y=(x-2)^2+3$ 上的點	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,7)$	$(5,12)$

表 9.2-5

表 9.2-5 中，對應的各點關係都是 x 座標增加 2 單位，y 座標增加 3 單位。事實上，整個$y=(x-2)^2+3$的圖形可以想像成是$y=x^2$的圖形往右移動 2 單位，再往上移動 3 單位。那麼 x 座標增加 2 單位，y 座標增加 3 單位是怎麼來的呢？

前面我們已經知道了：

$y=ax^2+k$ 的圖形相當於$y=ax^2$往上移動 k 單位。(若$k<0$則為往下移動$|k|$單位)

$y=a(x-h)^2$的圖形相當於$y=ax^2$往右移動 h 單位。(若$h<0$則為往左移動$|h|$單位)

合併成$y=a(x-h)^2+k$時也是一樣：

$y=a(x-h)^2+k$的圖形相當於$y=ax^2$往上移動 k 單位，往右移動 h 單位。(若$k<0$則為往下移動$|k|$單位，$h<0$則為往左移動$|h|$單位)

因此，$y=(x-2)^2+3$的圖形就相當於$y=x^2$的圖形往右移動 2 單位，再往上移動 3 單位。

我們已經知道了 $y=a(x-h)^2+k$ 相當於將 $y=ax^2$ 往右移動 h 單位($h<0$時為往左移動$|h|$單位)，往上移動 k 單位($k<0$時為往下移動$|k|$單位)。反過來說，$y=ax^2$若往上移動 k 單位，則方程式會變為 $y=ax^2+k$。接著再往右移動 h 單位，方程式就會變為 $y=a(x-h)^2+k$。

以 $y=2x^2$ 為例，將圖形往上移 4 單位，方程式會變為 $y=2x^2+4$。再繼續往右移 5 單位，方程式會變為 $y=2(x-5)^2+4$，如圖 9.2-6：

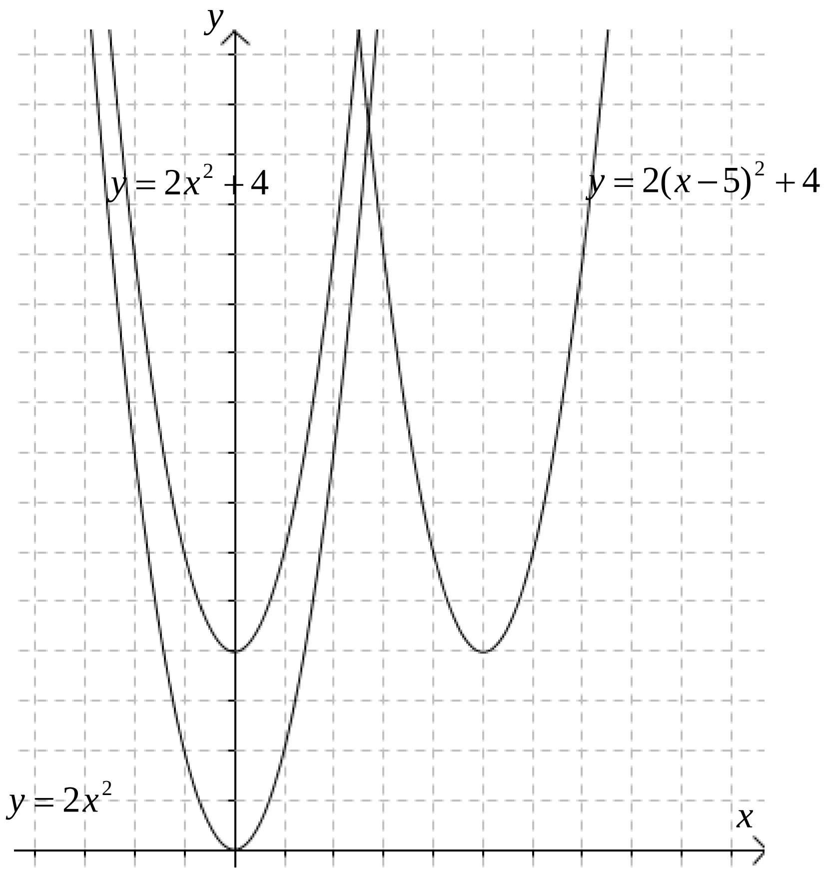


圖 9.2-6

同樣地，若是移動 $y=a(x-h)^2+k$ ，也會有下列關係：

(1)將 $y=a(x-h)^2+k$ 往上移動 k_1 單位，會得到 $y=a(x-h)^2+k+k_1$ 。$(k_1>0)$

(2)將 $y=a(x-h)^2+k$ 往下移動 k_2 單位，會得到 $y=a(x-h)^2+k-k_2$ 。$(k_2>0)$

(3)將 $y=a(x-h)^2+k$ 往右移動 h_1 單位，會得到 $y=a(x-h-h_1)^2+k$ 。$(h_1>0)$

(4)將 $y=a(x-h)^2+k$ 往左移動 h_2 單位，會得到 $y=a(x-h+h_2)^2+k$ 。$(h_2>0)$

瞭解了拋物線方程式的移動之後，接下來讓我們回到二次函數的函數圖形。
我們來移動 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形：

(1) 將 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形往上移動 k_1 單位，會得到 $f(x)=a(x-h)^2+k+k_1$ 。$(k_1>0)$

(2) 將 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形往下移動 k_2 單位，會得到 $f(x)=a(x-h)^2+k-k_2$ 。$(k_2>0)$

(3) 將 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形往右移動 h_1 單位，會得到 $f(x)=a(x-h-h_1)^2+k$ 。$(h_1>0)$

(4) 將 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的函數圖形往左移動 h_2 單位，會得到 $f(x)=a(x-h+h_2)^2+k$ 。$(h_2>0)$

例題 9.2-1

(1)求將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形上移 1 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形下移 3 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形右移 2 單位後所得的函數。

(4)求將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形左移 4 單位後所得的函數。

詳解：

利用前面討論的結果可以得到：

(1)將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形上移 1 單位後所得的函數為 $f(x)=-3x^2+1$ 。

(2)將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形下移 3 單位後所得的函數為 $f(x)=-3x^2-3$ 。

(3)將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形右移 2 單位後所得的函數為 $f(x)=-3(x-2)^2$ 。

(4)將 $f(x)=-3x^2$ 的函數圖形左移 4 單位後所得的函數為 $f(x)=-3(x+4)^2$ 。

【練習】9.2-1

(1)求將 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形下移 1 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形上移 3 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形左移 2 單位後所得的函數。

(4)求將 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 的函數圖形右移 4 單位後所得的函數。

例題 9.2-2

(1)求將 $f(x)=7x^2$ 的函數圖形上移 3 單位，左移 4 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=7x^2$ 的函數圖形下移 2 單位，右移 7 單位後所得的函數。

詳解：

(1) 將 $f(x)=7x^2$ 的函數圖形上移 3 單位後所得的函數為 $f(x)=7x^2+3$，再左移 4 單位得到 $y=7(x+4)^2+3$。

(2) 將 $f(x)=7x^2$ 的函數圖形下移 2 單位後所得的函數為 $f(x)=7x^2-2$，再右移 7 單位得到 $f(x)=7(x-7)^2-2$。

【練習】9.2-2

(1)求將 $f(x)=-5x^2$ 的函數圖形上移 3 單位，右移 5 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=-5x^2$ 的函數圖形下移 6 單位，左移 4 單位後所得的函數。

例題 9.2-3

(1)求將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形上移 3 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形左移 4 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形下移 2 單位，右移 1 單位後所得的函數。

詳解：

(1) 將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形上移 3 單位即得：

$$f(x)=(x-2)^2+1+3$$

$$f(x)=(x-2)^2+4$$

(2) 將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形左移 4 單位即得：

$$f(x)=(x-2+4)^2+1$$

$$f(x)=(x+2)^2+1$$

(3) 將 $f(x)=(x-2)^2+1$的函數圖形下移 2 單位，右移 1 單位即得：

$$f(x)=(x-2-1)^2+1-2$$

$$f(x)=(x-3)^2-1$$

【練習】9.2-3

(1)求將 $f(x)=(x+1)^2-2$ 的函數圖形上移 3 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=(x+1)^2-2$ 的函數圖形左移 4 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=(x+1)^2-2$ 的函數圖形下移 2 單位，右移 1 單位後所得的函數。

例題 9.2-4

求將 $f(x)=x^2+4x-7$ 的函數圖形左移 2 單位後所得的函數。

詳解：

首先利用配方法，將 $f(x)=x^2+4x-7$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2+4x-7 \\
&= x^2+4x+4-4-7 \\
&= (x+2)^2-4-7 \\
&= (x+2)^2-11
\end{aligned}
$$

將 $f(x)=(x+2)^2-11$ 的函數圖形左移 2 單位所得函數為：

$$f(x)=(x+2+2)^2-11$$

$$f(x)=(x+4)^2-11$$

【練習】9.2-4

求將 $f(x)=x^2-6x-3$ 的函數圖形下移 3 單位後所得的函數。

例題 9.2-5

求將 $f(x)=-3x^2+18x-1$ 的函數圖形右移 5 單位，下移 3 單位後所得的函數。

詳解：

首先利用配方法，將 $f(x)=-3x^2+18x-1$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -3x^2+18x-1 \\
&= -3(x^2-6x)-1 \\
&= -3(x^2-6x+9-9)-1 \\
&= -3(x^2-6x+9)+27-1 \\
&= -3(x-3)^2+26
\end{aligned}
$$

將 $f(x)=-3(x-3)^2+26$ 的函數圖形右移 5 單位，下移 3 單位所得的函數為：

$$f(x)=-3(x-3-5)^2+26-3$$

$$f(x)=-3(x-8)^2+23$$

【練習】9.2-5

求將 $f(x)=-2x^2+4x-1$ 的函數圖形左移 2 單位，上移 7 單位後所得的函數。

9.2 節 習題

習題 9.2-1

(1)求將 $f(x)=2x^2$ 的函數圖形上移 2 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=2x^2$ 的函數圖形下移 4 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=2x^2$ 的函數圖形左移 1 單位後所得的函數。

(4)求將 $f(x)=2x^2$ 的函數圖形右移 3 單位後所得的函數。

習題 9.2-2

(1)求將 $f(x)=3x^2$ 的函數圖形上移 4 單位，右移 2 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=3x^2$ 的函數圖形下移 1 單位，左移 3 單位後所得的函數。

習題 9.2-3

(1)求將 $f(x)=(x-3)^2-1$ 的函數圖形上移 4 單位後所得的函數。

(2)求將 $f(x)=(x-3)^2-1$ 的函數圖形左移 5 單位後所得的函數。

(3)求將 $f(x)=(x-3)^2-1$ 的函數圖形下移 3 單位，左移 2 單位後所得的函數。

習題 9.2-4

求將 $f(x)=x^2+2x-1$ 的函數圖形右移 3 單位後所得的函數。

習題 9.2-5

求將 $f(x)=-x^2-4x+3$ 的函數圖形右移 3 單位，下移 5 單位後所得的函數。

9.3 節 二次函數的最大值與最小值

在 9.1 節中，我們有討論過拋物線的頂點，同學若觀察圖形，可發現頂點同時也是拋物線中最高或最低的點。

以 $y=(x-4)^2-5$ 為例：

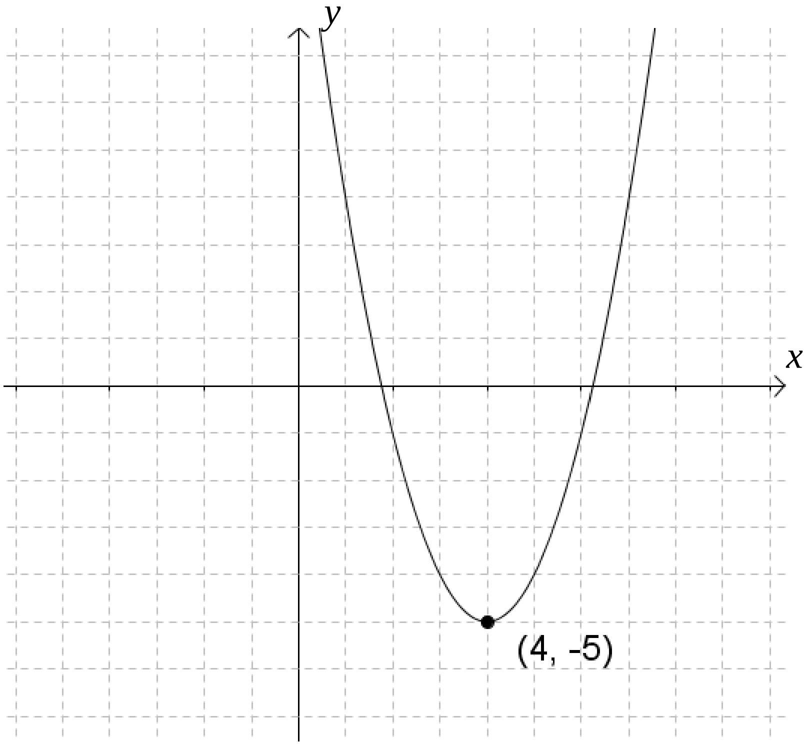


圖 9.3-1

$y=(x-4)^2-5$ 開口向上，頂點 $(4,-5)$ 在最低點。我們可以說，此拋物線的 y 座標有最小值 -5 。

利用這一點，我們可以求出二次函數的最大值或最小值。例如二次函數 $f(x)=(x-4)^2-5$ ，其函數的最小值就是 -5 。

要注意的是， $f(x)=(x-4)^2-5$ 雖然可以找到最小值，但因為函數圖形開口向上，因此不會找到最大值。

再來看看 $y = f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ 的圖形：

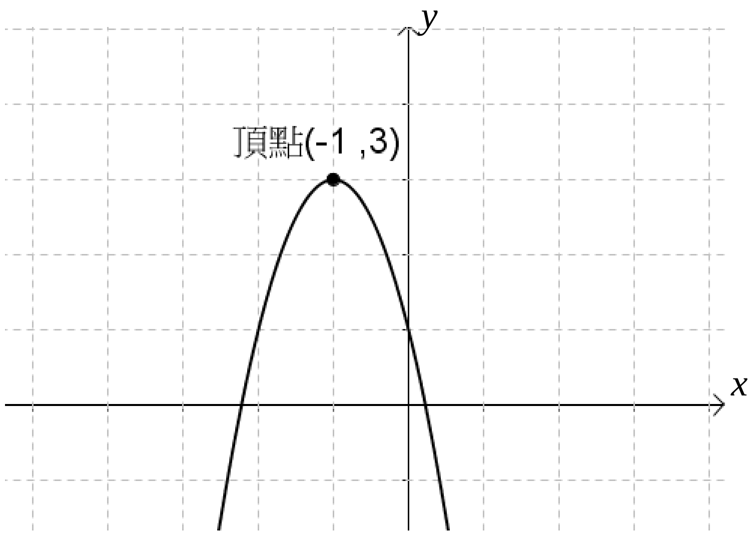


圖 9.3-2

由圖 9.3-2 可知，拋物線 $y = -2(x+1)^2 + 3$ 的頂點 $(-1,3)$ 是最高點。也就是二次函數 $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$ 有最大值 3。因為圖形開口向下，因此此二次函數沒有最小值。

由以上討論可知：

若 $a > 0$，則拋物線 $y = a(x-h)^2 + k$ 的**最低點**為 (h,k)。二次函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 的**最小值**為 k。

若 $a < 0$，則拋物線 $y = a(x-h)^2 + k$ 的**最高點**為 (h,k)。二次函數 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ 的**最大值**為 k。

例題 9.3-1

判斷拋物線 $y=3(x-3)^2+5$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

詳解：

$3>0$，因此拋物線開口向上，有最低點，無最高點。

頂點為 $(3,5)$，$(3,5)$ 即為最低點。

【練習】9.3-1

判斷拋物線 $y=\frac{3}{2}(x+4)^2-2$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

例題 9.3-2

判斷拋物線 $y=-3\frac{1}{3}(x+2\frac{1}{2})^2+7$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

詳解：

$-3\frac{1}{3}>0$，因此拋物線開口向下，有最高點，無最低點。

頂點為 $(-2\frac{1}{2},7)$，$(-2\frac{1}{2},7)$ 即為最高點。

【練習】9.3-2

判斷拋物線 $y=-\frac{7}{2}(x-3\frac{1}{2})^2+3\frac{3}{4}$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

例題 9.3-3

判斷二次函數 $f(x)=\frac{1}{7}(x-2)^2+3$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

詳解：

$\frac{1}{7}>0$ ，因此函數有最小值，無最大值。

$y=f(x)$ 函數圖形頂點為 $(2,3)$ ，函數最小值為 3。

【練習】9.3-3

判斷二次函數 $f(x)=\frac{7}{3}(x-4)^2-7$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

例題 9.3-4

判斷二次函數 $f(x)=-2(x+4)^2+2$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

詳解：

$-2<0$ ，因此函數有最大值，無最小值。

$y=f(x)$ 函數圖形頂點為 $(-4,2)$ ，函數最大值為 2。

【練習】9.3-4

判斷二次函數 $f(x)=-0.6(x+9)^2+3$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

除了從拋物線頂點來看最大最小值以外，我們也可以利用不等式來觀察。以例題 9.3-3 中的二次函數 $f(x)=\frac{1}{7}(x-2)^2+3$ 為例，我們知道平方數會大於或等於 0，因此：

$(x-2)^2 \geq 0$（平方數會大於或等於 0）

$(x-2)^2 \times \frac{1}{7} \geq 0 \times \frac{1}{7}$（等量公理，不等號左右皆乘以 $\frac{1}{7}$）

$\frac{1}{7}(x-2)^2 \geq 0$

$\frac{1}{7}(x-2)^2+3 \geq 3$（等量公理，不等號左右都加上 3）

$f(x)=\frac{1}{7}(x-2)^2+3 \geq 3$

$f(x) \geq 3$

得到此二次函數的函數值大於等於 3，即此函數的最小值為 3。與例題 9.3-3 利用圖形頂點得出的答案相同。

接著再來看例題 9.3-4 中的二次函數 $f(x)=-2(x+4)^2+2$，我們一樣從平方數大於等於 0 開始：

$(x+4)^2 \geq 0$ (平方數會大於或等於 0)

$(x+4)^2 \times (-2) \leq 0 \times (-2)$ (等量公理，不等號左右皆乘以 (-2)，乘以負數時不等式方向相反)

$-2(x+4)^2 \leq 0$

$-2(x+4)^2+2 \leq 2$ (等量公理，不等號左右加上 2)

$f(x)=-2(x+4)^2+2 \leq 2$

$f(x) \leq 2$

得到此二次函數的函數值小於等於 2，即此函數的最大值為 2。與例題 9.3-4 利用圖形頂點得出的答案相同。

因此我們從不等式一樣可以得知，對於二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ ：

若 $a>0$ ，則此二次函數有最小值 k。

若 $a<0$，則此二次函數有最大值 k。

例題 9.3-5

找出二次函數 $f(x)=12(x-6)^2-8$ 的最大值或最小值。

詳解：

對於二次函數 $f(x)=a(x-h)^2+k$ ，若 $a>0$ ，則此二次函數有最小值 k。

$f(x)=12(x-6)^2-8$ 中， $a=12>0$ ， $k=-8$，因此有最小值 -8 。

【練習】9.3-5

找出二次函數 $f(x)=-4(x+3)^2-16$ 的最大值或最小值。

例題 9.3-6

找出二次函數 $f(x)=-5x^2+20x+3$ 的最大值或最小值。

詳解：

先利用配方法，將 $f(x)=-5x^2+20x+3$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$\begin{aligned}
f(x) &= -5x^2+20x+3 \\
&= -5(x^2-4x)+3 \\
&= -5(x^2-4x+4-4)+3 \\
&= -5(x^2-4x+4)+20+3 \\
&= -5(x+2)^2+23
\end{aligned}$$

$-5<0$ ，因此函數有最大值 23。

【練習】9.3-6

找出二次函數 $f(x)=7x^2+14x+6$ 的最大值或最小值。

例題 9.3-7

找出二次函數 $f(x)=(x-2)(x-4)$ 的最大值或最小值。

詳解：

方法一：

先利用配方法，將 $f(x)=(x-2)(x-4)$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x-4) \\ &= x^2-6x+8 \\ &= x^2-6x+9-9+8 \\ &= (x-3)^2-9+8 \\ &= (x-3)^2-1 \end{aligned}$$

$(x-3)^2=1\times(x-3)^2$，$1>0$，因此函數有最小值 -1。

方法二：

前面觀念提到拋物線的頂點即為最大值或最小值發生的位置。

所以我們觀察 $f(x)=(x-2)(x-4)$，會發現當代入 $x=2$ 及 $x=4$ 時得到的函數值：$f(2)=f(4)=0$。根據拋物線對稱的原理，函數值相等的左右兩點中間是對稱軸，所以 $x=2$ 與 $x=4$ 的中間值 $x=\dfrac{(2+4)}{2}=3$ 為拋物線的對稱軸亦是頂點的 x 座標，將 $x=3$ 代入二次函數：$f(3)=(3-2)(3-4)=-1$。因此函數最小值為 -1。

【練習】9.3-7

找出二次函數 $f(x)=(x+5)(x+3)$ 的最大值或最小值。

例題 9.3-8

找出二次函數 $f(x)=2(x-1)(x-5)+1$ 的最大值或最小值。

詳解：

方法一：

先利用配方法，將 $f(x)=2(x-1)(x-5)+1$ 化成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2(x-1)(x-5)+1 \\
&= 2x^2-12x+10+1 \\
&= 2(x^2-6x)+11 \\
&= 2(x^2-6x+9-9)+11 \\
&= 2(x^2-6x+9)-18+11 \\
&= 2(x-3)^2-7
\end{aligned}
$$

$2>0$，因此函數有最小值 -7。

方法二：

前面觀念提到拋物線的頂點即為最大值或最小值發生的位置。

所以我們觀察 $f(x)=2(x-1)(x-5)+1$，會發現當代入 $x=1$ 及 $x=5$ 時得到的函數值：$f(1)=f(5)=1$。根據拋物線對稱的原理，函數值相等的左右兩點中間是對稱軸，所以 $x=1$ 與 $x=5$ 的中間值 $x=\dfrac{(1+5)}{2}=3$ 為拋物線的對稱軸亦是頂點的 x 座標，將 $x=3$ 代入二次函數：$f(3)=2(3-1)(3-5)+1=-7$。因此函數最小值為 -7。

【練習】9.3-8

找出二次函數 $f(x)=3(x+1)(x-11)+3$ 的最大值或最小值。

9.3 節 習題

習題 9.3-1

判斷拋物線 $y=4(x-1)^2+2$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

習題 9.3-2

判斷拋物線 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2-1$ 是否有最高點或最低點，並寫出最高點或最低點座標。

習題 9.3-3

判斷二次函數 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2+5$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

習題 9.3-4

判斷二次函數 $f(x)=-5(x-1)^2-2$ 是否有最大值或最小值，若有則求出最大值或最小值。

習題 9.3-5

找出二次函數 $f(x)=4(x+2)^2-4$ 的最大值或最小值。

習題 9.3-6

找出二次函數 $f(x)=-3x^2+6x-5$ 的最大值或最小值。

習題 9.3-7

找出二次函數 $f(x)=(x-3)(x-7)$ 的最大值或最小值。

習題 9.3-8

找出二次函數 $f(x)=4(x-3)(x-5)+2$ 的最大值或最小值。

9.4 節　二次函數的綜合題與應用題

前三小節中，我們已經瞭解的二次函數的基本知識，接下來將開始計算各種綜合題與應用題。

例題 9.4-1

圖 9.4-1 為二次函數 $y=x^2$ 的圖形。A、B 兩點在 $y=x^2$ 上，且 A、B 兩點與 x 軸的距離都是 9，試求 A、B 之間的距離。

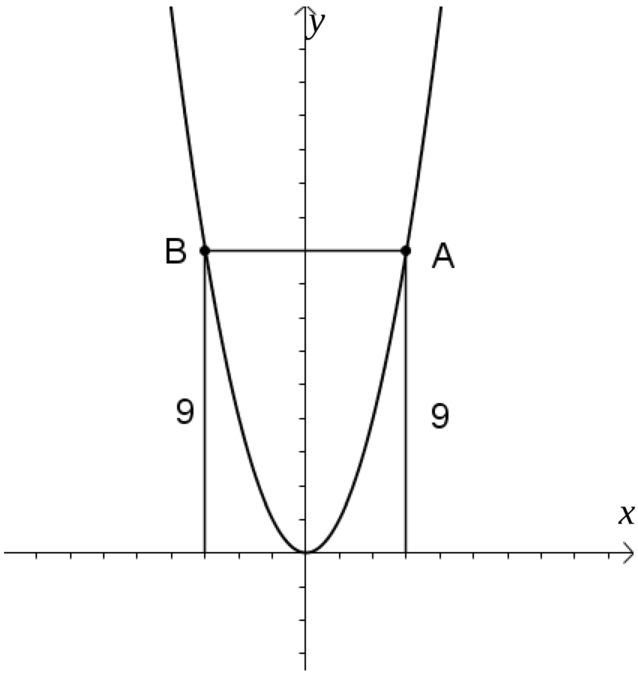


圖 9.4-1

詳解：

因為 A、B 兩點與 x 軸的距離都是 9，可知兩點的 y 座標也都是 9。

將 $y=9$ 代入 $y=x^2$：

$$9=x^2$$

$$x=\pm3$$

可知兩點座標為 $(3,9)$ 與 $(-3,9)$。又根據圖 9.4-1，A 點在第一象限，B 點在第二象限，可判斷 A 點座標為 $(3,9)$，B 點座標為 $(-3,9)$。

A、B 兩點 y 座標相同，因此距離為 x 座標之差。

A、B 之間的距離 $=|3-(-3)|=6$

【練習】9.4-1

圖 9.4-2 為二次函數 $y=2x^2$ 的圖形。A、B 兩點在 $y=2x^2$ 上，且 A、B 兩點與 x 軸的距離都是 8，試求 A、B 之間的距離。

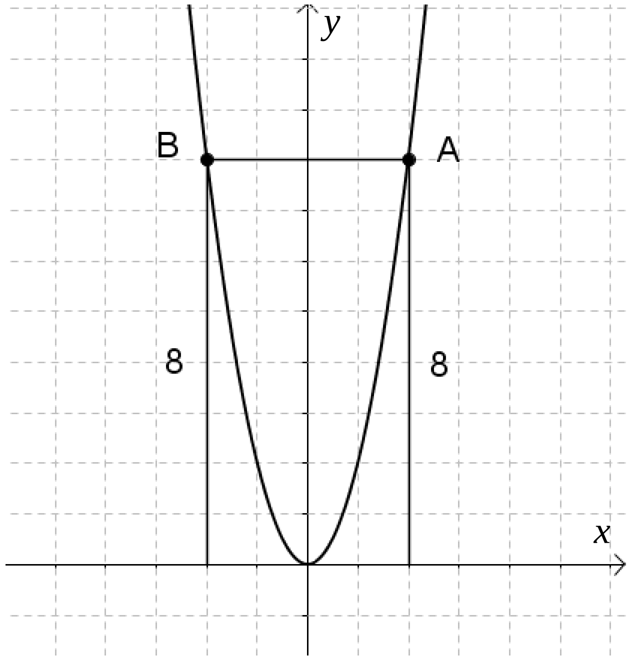


圖 9.4-2

例題 9.4-2

求拋物線 $y=x^2+1$ 與直線 $y=x+7$ 的交點。

詳解：

求兩方程式交點相當於解聯立方程式：

$$\begin{cases} y=x^2+1 \text{ ......(1)} \\ y=x+7 \text{ ......(2)} \end{cases}$$

由 $(1)=(2)$ ：

$$x^2+1=x+7$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)(x+2)=0 \qquad \text{（利用十字交乘）}$$

$$x=3,-2$$

將 $x=3$ 代入 $y=x+7$ ，得 $y=10$，因此 $(3,10)$ 為一交點。

將 $x=-2$ 代入 $y=x+7$ ，得 $y=5$，因此 $(-2,5)$ 為一交點。

得拋物線 $y=x^2+1$ 與直線 $y=x+7$ 的交點為 $(3,10)$ 和 $(-2,5)$ 。

同學可以將兩交點分別代入兩方程式，驗算答案是否正確。

【練習】9.4-2

求拋物線 $y=x^2-6x+7$ 與直線 $y=2x-5$ 的交點。

例題 9.4-3

小明想用一條 100 公分長的繩子，圍成一個矩形。請問長、寬分別為多少公分時，可圍出最大的面積？最大的面積是多少平方公分？

詳解：

依題意，矩形周長為 100 公分，矩形周長＝(長＋寬)×2，

即 100＝(長＋寬)×2，長＋寬＝50

令長為 x 公分，可得寬為 $(50-x)$ 公分。

利用二次函數的最大值求法，找出面積最大值。

$$
\begin{aligned}
\text{矩形面積} &= x(50-x) \\
&= 50x-x^2 \\
&= -x^2+50x \\
&= -(x^2-50x) \\
&= -(x^2-50x+625-625) \\
&= -(x^2-50x+625)+625 \\
&= -(x-25)^2+625
\end{aligned}
$$

因此當 $x=25$ 時，有最大值 625。

即長為 25 公分，寬為 25 公分時，可圍出最大的矩形面積 625 平方公分。

【練習】9.4-3

小華想用一條 200 公分長的繩子，圍成一個矩形。請問長、寬分別為多少公分時，可圍出最大的面積？最大的面積是多少平方公分？

例題 9.4-4

小豪在練習投籃，假設投出的籃球軌跡為 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$，且此球有進籃框(即拋物線通過籃框座標)。如圖 9.4-3，其中 x 公尺為籃球移動的水平距離，y 公尺為籃球高度。請問：

(1)此籃球在移動過程中，距離地面最高高度為多少公尺？

(2)若小豪此球出手時，球的高度為 2 公尺，請問小豪與籃框的水平距離是幾公尺？

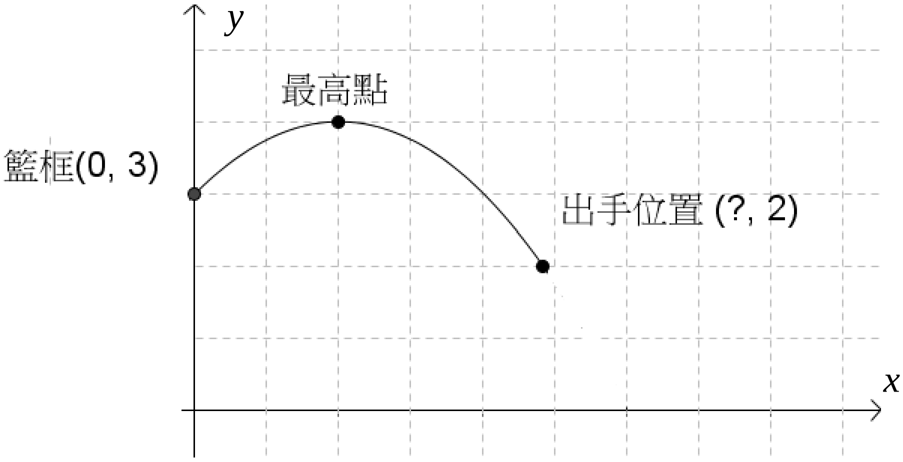


圖 9.4-3

詳解：

(1)最高點即頂點

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{4}x^2+x+3 \\
&= -\frac{1}{4}(x^2-4x)+3 \\
&= -\frac{1}{4}(x^2-4x+4)+1+3 \\
&= -\frac{1}{4}(x-2)^2+4
\end{aligned}
$$

得頂點座標 $(2,4)$，y 座標為籃球高度，因此最高點高度為 4 公尺。

(2) 小豪此球出手時，球的高度為 2 公尺。我們將 $y=2$ 代入方程式，求出出手位置。

$$-\frac{1}{4}x^2+x+3=2$$

$$-\frac{1}{4}x^2+x+1=0$$

$$x^2-4x-4=0 \qquad \text{(左右同乘以}(-4))$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-4)}}{2}$$ （利用公式解）

$$x=2\pm2\sqrt{2}$$

由圖 9.4-3 可知，出手位置在第一象限，因此取 $x=2+2\sqrt{2}$

出手位置為 $(2+2\sqrt{2},2)$，與 y 軸距離是 $(2+2\sqrt{2})$ 公尺。出手位置與籃框的水平距離即與 y 軸的距離，因此小豪與籃框的水平距離為 $(2+2\sqrt{2})$ 公尺。

【練習】9.4-4

小文站在高台上拋了一個紙飛機，假設紙飛機的飛行軌跡為 $y=-\frac{1}{50}x^2+\frac{2}{5}x+6$。如圖 9.4-4，其中 x 公尺為紙飛機移動的水平距離，y 公尺為紙飛機高度。請問：

(1)此紙飛機在移動過程中，距離地面最高高度為多少公尺？

(2)此紙飛機落地時，水平距離共移動了多少公尺？

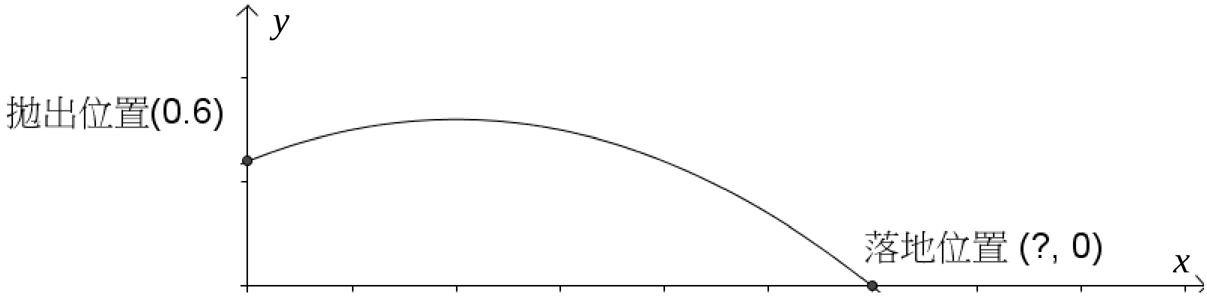


圖 9.4-4

例題 9.4-5

從地面發射一枚砲彈，若經過時間 t 秒與砲彈高度 y 公尺的關係式為 $y=-t^2+20t$，請問：

(1)此砲彈飛到最高點時，高度為多少公尺？

(2)此砲彈高度為 75 公尺時，經過時間為多少秒？

詳解：

(1)找出 $y=-t^2+20t$ 中，y 的最大值。

$$
\begin{aligned}
y &= -t^2+20t \\
&= -(t^2-20t) \\
&= -(t^2-20t+100-100) \\
&= -(t^2-20t+100)+100 \\
&= -(t-10)^2+100
\end{aligned}
$$

可知在 $t=10$ 時，y 有最大值 100。即砲彈最高高度為 100 公尺。

(2) 砲彈高度為 75 公尺，即 $y=75$

$$-t^2+20t=75$$

$$-t^2+20t-75=0$$

$$t^2-20t+75=0$$

$$(t-5)(t-15)=0$$

$$t=5,15$$

即砲彈高度為 75 公尺時，經過時間為 5 秒或 15 秒。

【練習】9.4-5

<u>小君</u>將一顆棒球往空中拋，若經過時間 t 秒與棒球高度 y 公尺的關係式為 $y=-4.9t^2+19.6t$，請問：

(1)此棒球拋出後，最高高度為多少公尺？

(2)此棒球拋出到落地，共經過多少秒？

例題 9.4-6

已知某拋物線最低點為$O(0,0)$，且與直線$y=5$交於A、B兩點，A點在第一象限，B點在第二象限。若ΔOAB的面積為25平方單位，試求：

(1)A、B兩點之座標為何？

(2)此拋物線方程式為何？

詳解：

(1)依題目條件來畫出拋物線圖形，如圖 9.4-5。

拋物線最低點為$O(0,0)$，即頂點為$(0,0)$，對稱軸為$x=0$。

拋物線與直線$y=5$交於A、B兩點，可知開口應向上。

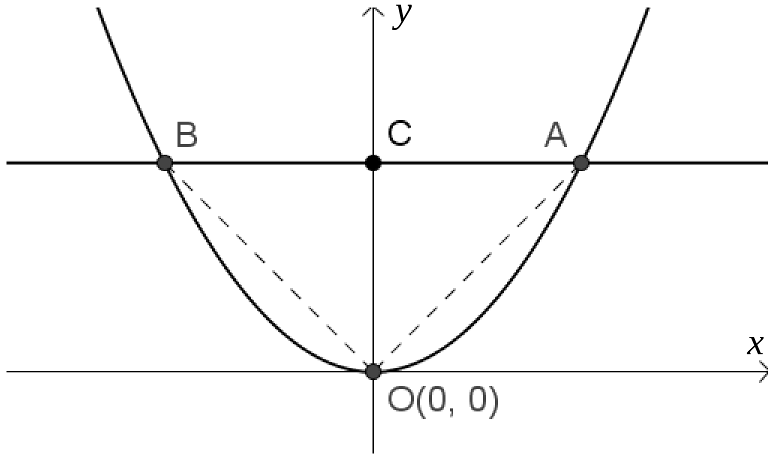


圖 9.4-5

設直線$y=5$與y軸交於C點，則C座標為$(0,5)$，且$\overline{OC}=5$。

ΔOAB中，令底為$\overline{AB}$，則高為$\overline{OC}$。根據ΔOAB的面積為25平方單位：

$$\Delta OAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}$$

$$25=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 5$$

解得$\overline{AB}=10$

因為C為對稱軸$x=0$上一點，因此C為$\overline{AB}$中點，$\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$

A點與y軸距離為5，且在第一象限，通過直線$y=5$，可知座標為$(5,5)$。

同理B點座標為$(-5,5)$。

(2)設拋物線方程式為 $y=a(x-h)^2+k$

代入頂點 $(0,0)$ ，得方程式為 $y=a(x-0)^2+0=ax^2$

代入 $A(5,5)$ ：

$$y=ax^2$$

$$5=a\times(5)^2$$

$$5=25a$$

$$a=\frac{1}{5}$$

因此拋物線方程式為 $y=\frac{1}{5}x^2$

【練習】9.4-6

已知某拋物線最低點為 $O(0,0)$ ，且與直線 $y=9$ 交於 A、B 兩點，A 點在第一象限，B 點在第二象限。若 ΔOAB 的面積為 54 平方單位，試求：

(1) A 、B 兩點之座標為何？

(2)此拋物線方程式為何？

例題 9.4-7

小幼旅行社招募花東三天兩夜旅行團，預定人數為 20 人，每人收費 3000 元。但達到 20 人之後，每超過 1 人，則每人費用減 100 元。例如若有 21 人，則每人收費 2900 元。請問人數為多少時，旅行社收到的總費用會最多？

詳解：

題目想找總費用最多的情形，我們可以利用求二次函數的最大值來找出答案。

設超過 x 人，旅行社收到的總費用最多。則每人收費為 $(3000-100x)$ 元。

令總費用為 $f(x)$

總費用＝人數×旅費

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (20+x)(3000-100x) \\
&= -100(20+x)(x-30) \\
&= -100(x^2-10x-600) \\
&= -100(x^2-10x+25-25-600) \\
&= -100(x^2-10x+25-625) \\
&= -100(x^2-10x+25)+62500 \\
&= -100(x-5)^2+62500
\end{aligned}
$$

因此當 $x=5$ 時，函數有最大值 62500。

也就是人數為 25 人時，總費用 62500 元為最多。

我們來試著計算看看不同人數時的費用：

24 人時，總費用為 $24\times2600=62400$

25 人時，總費用為 $25\times2500=62500$

26 人時，總費用為 $26\times2400=62400$

可知確實在 25 人時總費用最多，24 人與 26 人時總費用都會變少。

【練習】9.4-7

小博旅行社招募十九尖山兩天一夜旅行團，預定人數為 30 人，每人收費 4000 元。但達到 30 人之後，每超過 1 人，則每人費用減 100 元。例如若有 31 人，則每人收費 3900 元。請問人數為多少時，旅行社收到的總費用會最多？

例題 9.4-8

某果園中有 20 棵橘子樹，平均每棵年產 400 個橘子。若在果園中每加種 1 棵橘子樹，則每棵樹平均年產量會減少 10 個橘子。請問加種多少棵橘子樹，可使橘子產量最大？

詳解：

題目想找橘子產量最大的情形，我們可以利用求二次函數的最大值來找出答案。

設加種 x 棵橘子樹，橘子產量最大。則每棵樹平均年產量為 $(400-10x)$ 個橘子。

令果園中所有橘子樹的總年產量為 $f(x)$

總產量＝橘子樹數量×每棵樹平均產量

$$\begin{aligned} f(x) &= (20+x)(400-10x) \\ &= -10(20+x)(x-40) \\ &= -10(x^2-20x-800) \\ &= -10(x^2-20x+100-100-800) \\ &= -10(x^2-20x+100-900) \\ &= -10(x^2-20x+100)+9000 \\ &= -10(x-10)^2+9000 \end{aligned}$$

因此當 $x=10$ 時，函數有最大值 9000。

也就是加種 10 棵橘子樹時，總產量 9000 個橘子為最多。

【練習】9.4-8

某香蕉園中有 50 棵香蕉樹，1 棵香蕉樹 1 年可產 600 根香蕉。若在香蕉園中每加種 1 棵香蕉樹，則每棵樹平均年產量會減少 10 根香蕉。請問加種多少棵香蕉樹時，可使香蕉產量最大？

例題 9.4-9

若 $x+y=10$，則：(1) xy 的最大值為何？(2) x^2+y^2 的最小值為何？

詳解：

(1) 題目想找 xy 的最大值。我們要試著從已知條件 $x+y=10$ 中找出 xy。

$x+y=10$

$(x+y)\times x=10\times x$ （等量公理，等號兩邊同乘以 x）

$x^2+xy=10x$

$$\begin{aligned} xy &= -x^2+10x \\ &= -(x^2-10x) \\ &= -(x^2-10x+25-25) \\ &= -(x^2-10x+25)+25 \\ &= -(x-5)^2+25 \end{aligned}$$

可知在 $x=5$ 時，xy 有最大值 25。

(2) 題目想找 x^2+y^2 的最小值。我們要試著將 $x+y=10$ 平方來找出 x^2+y^2。

$$x+y=10$$

$$(x+y)^2=10^2 \quad （等號兩邊都平方）$$

$$x^2+2xy+y^2=100$$

$$x^2+y^2=100-2xy$$

由(1)可知，xy 最大值為 25，因此 x^2+y^2 的最小值為 $100-2\times25=50$。

【練習】9.4-9

若 $x+y=12$，則：(1) xy 的最大值為何？(2) x^2+y^2 的最小值為何？

例題 9.4-10

若 $2x+5y=20$，試求 $5xy$ 的最大值。

詳解：

與例題 9.4-9 相同，我們要試著在 $2x+5y=20$ 中找出 $5xy$。

$$2x+5y=20$$

$$(2x+5y)\times x=20\times x \text{（等量公理，等號兩邊同乘以 } x\text{）}$$

$$2x^2+5xy=20x$$

$$\begin{aligned}5xy&=-2x^2+20x\\&=-2(x^2-10x)\\&=-2(x^2-10x+25-25)\\&=-2(x^2-10x+25)+50\\&=-2(x-5)^2+50\end{aligned}$$

可知 $5xy$ 的最大值為 50。

【練習】9.4-10

若 $5x+3y=30$，試求 $3xy$ 的最大值。

例題 9.4-11

數線上有 A、B 兩點，座標分別為 2、12。今在 A、B 之間取一點 C，請問：

(1)C 點座標為多少時，$\overline{AC}\times\overline{CB}$ 有最大值？

(2)C 點座標為多少時，$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$ 有最小值？

詳解：

設 C 點座標為 x，則 $\overline{AC}=x-2$，$\overline{CB}=12-x$

(1)
$$
\begin{aligned}
\overline{AC}\times\overline{CB} &= (x-2)(12-x)\\
&= -(x-2)(x-12)\\
&= -(x^2-14x+24)\\
&= -(x^2-14x+49-49+24)\\
&= -(x^2-14x+49-25)\\
&= -(x^2-14x+49)+25\\
&= -(x-7)^2+25
\end{aligned}
$$

得 $x=7$ 時，$\overline{AC}\times\overline{CB}$ 有最大值 25。 即 C 點座標為 7。

(2)
$$
\begin{aligned}
\overline{AC}^2+\overline{CB}^2 &= (x-2)^2+(12-x)^2\\
&= x^2-4x+4+x^2-24x+144\\
&= 2x^2-28x+148\\
&= 2(x^2-14x)+148\\
&= 2(x^2-14x+49-49)+148\\
&= 2(x^2-14x+49)-98+148\\
&= 2(x-7)^2+50
\end{aligned}
$$

得 $x=7$ 時，$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$ 有最小值 50。 即 C 點座標為 7。

【練習】9.4-11

數線上有 A、B 兩點，座標分別為 1、9。今在 A、B 之間取一點 C，請問：

(1)C 點座標為多少時，$\overline{AC}\times\overline{CB}$ 有最大值？

(2)C 點座標為多少時，$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$ 有最小值？

例題 9.4-12

如圖 9.4-6，阿土伯想在河邊用鐵絲圍一個長方形的菜園，鐵絲長 300 公尺。河當作一邊不用鐵絲圍。請問圍成的菜園，最大面積為多少平方公尺？

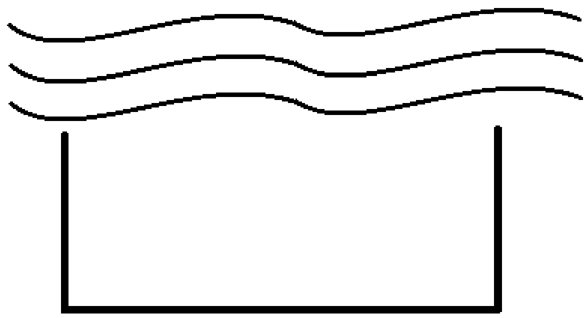


圖 9.4-6

詳解：

設河的對邊長度為 x 公尺。則鐵絲剩下 $(300-x)$ 公尺，因為是長方形，剩餘兩邊長度相同，皆為 $\frac{300-x}{2}$ 公尺。

長方形菜園面積＝長×寬$=x\times\frac{300-x}{2}$

$$=\frac{300x-x^2}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-300x)$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-300x+22500-22500) \qquad \left(\left(\frac{300}{2}\right)^2=22500\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(x-150)^2+11250$$

可知當 $x=150$ 時，菜園面積 11250 平方公尺為最大。

【練習】9.4-12

阿明想在河邊用鐵絲圍一個長方形的菜園，鐵絲長 200 公尺。河邊當作一邊不用鐵絲圍。請問圍成的菜園，最大面積為多少平方公尺？

9.4 節 習題

習題 9.4-1

圖 9.4-7 為二次函數 $y=4x^2$ 的圖形。A、B 兩點在 $y=4x^2$ 上，且 A、B 兩點與 x 軸的距離都是 16，試求 A、B 之間的距離。

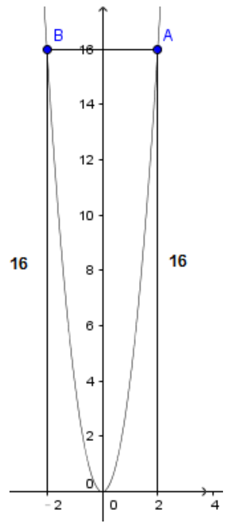


圖 9.4-7

習題 9.4-2

求拋物線 $y=x^2+2x$ 與直線 $y=-5x-12$ 的交點。

習題 9.4-3

<u>小朱</u>想用一條 40 公分長的繩子，圍成一個矩形。請問長、寬分別為多少公分時，可圍出最大的面積？最大的面積是多少平方公分？

習題 9.4-4

小布玩積木投籃遊戲，假設投出的籃球軌跡為 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x+5$，且此球有進籃框(即拋物線通過籃框座標)。如圖 9.4-8，其中 x 公分為籃球移動的水平距離，y 公分為籃球高度。請問：

(1)此籃球在移動過程中，距離地面最高高度為多少公分？

(2)若小布此球出手時，球的高度為 3 公分，請問小布與籃框的水平距離是幾公分？

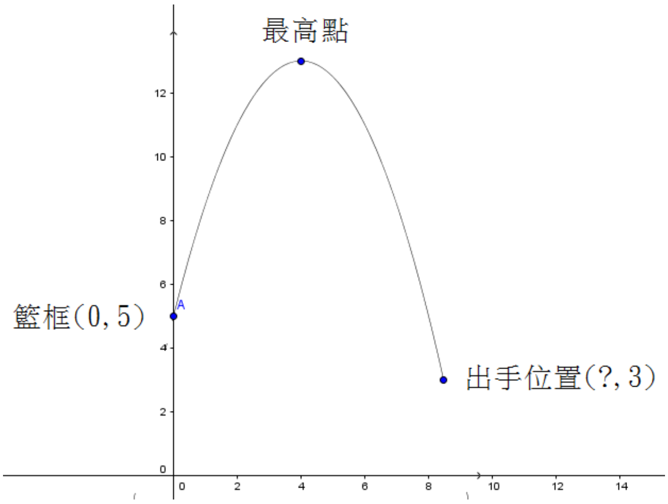


圖 9.4-8

習題 9.4-5

從地面發射一枚砲彈，若經過時間 t 秒與砲彈高度 y 公尺的關係式為 $y=-t^2+30t$，請問：

(1)此砲彈飛到最高點時，高度為多少公尺？

(2)此砲彈高度為 125 公尺時，經過時間為多少秒？

習題 9.4-6

已知某拋物線最低點為$O(0,0)$，且與直線$y=12$交於A、B兩點，A點在第一象限，B點在第二象限。若ΔOAB的面積為72平方單位，試求：

(1)A、B兩點之座標為何？

(2)此拋物線方程式為何？

習題 9.4-7

丹丹家舉辦三天兩夜家族旅遊，預定人數為10人，每人收費2000元。但達到10人之後，每超過1人，則每人費用減100元。例如若有11人，則每人收費1900元。請問人數為多少時，收到的總費用會最多？

習題 9.4-8

開心果園中有10棵蘋果樹，平均每棵年產200個蘋果。若在果園中每加種1棵蘋果樹，則每棵樹平均年產量會減少10個蘋果。請問加種多少棵蘋果樹，可使蘋果產量最大？

習題 9.4-9

若 $x+y=14$，則：(1) xy 的最大值為何？(2) x^2+y^2 的最小值為何？

習題 9.4-10

若 $3x+4y=24$，試求 $4xy$ 的最大值。

習題 9.4-11

數線上有 A、B 兩點，座標分別為 1、11。今在 A、B 之間取一點 C，請問：

(1) C 點座標為多少時，$\overline{AC}\times\overline{CB}$ 有最大值？

(2) C 點座標為多少時，$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$ 有最小值？

習題 9.4-12

如圖 9.4-9，阿土伯想在河邊用鐵絲圍一個長方形的菜園，鐵絲長 500 公尺。河當作一邊不用鐵絲圍。請問圍成的菜園，最大面積為多少平方公尺？

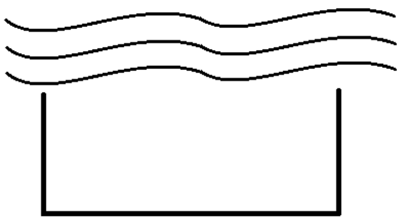


圖 9.4-9

第九章綜合習題

習題 1：

畫出下列二次函數的圖形

（1）$f(x) = -4x^2$

（2）$f(x) = \dfrac{2}{5}x^2$

（3）$f(x) = 3(x+2)^2$

（4）$f(x) = 2x^2 + 2$

（5）$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$

習題 2：

試寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點座標與對稱軸：

(1) $f(x)=-x^2$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

(3) $f(x)=\frac{1}{7}x^2-2$

(4) $f(x)=-(x-1)^2$

(5) $f(x)=2(x-1)^2+1$

(6) $f(x)=x^2-4x-1$

(7) $f(x)=3x^2+6x-4$

(8) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+5$

習題 3：

試求下列二次函數的最大值或最小值，並寫出 x 的值為多少時，會得到最大值或最小值：

（1） $f(x) = 2x^2 + 6$

（2） $f(x) = -3x^2 - 1$

（3） $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$

（4） $f(x) = 3(x+3)^2 - 3$

（5） $f(x) = -3x^2 + 24x - 12$

（6） $f(x) = x^2 - 4x + 5$

（7） $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 1$

（8） $f(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - 8x - 1$

習題 4：

二次函數 $f(x)=-10x^2$ 的圖形向左移動 10 單位、向下移動 3 單位後可得 $f(x)=a(x+p)^2+k$，試求 $a+p+k$ 之值。

習題 5：

若二次函數 $f(x)=x^2+x-56$ 的函數圖形與 x 軸交於 A、B 兩點，試求 $\overline{AB}$。

習題 6：

求拋物線 $y=x^2-3x$ 與直線 $y=3x-8$ 的交點。

習題 7：

若 $x+y=16$，則：(1) xy 的最大值為何？(2) x^2+y^2 的最小值為何？

習題 8：

楊楊想用一條 400 公分長的繩子，圍成一個矩形。請問長、寬分別為多少公分時，可圍出最大的面積？最大的面積是多少平方公分？

習題 9：

從地面發射一枚砲彈，若經過時間 t 秒與砲彈高度 y 公尺的關係式為 $y=-t^2+8t$，請問：

(1)此砲彈飛到最高點時，高度為多少公尺？

(2)此砲彈高度為 12 公尺時，經過時間為多少秒？

習題 10：

已知某拋物線最低點為 $O(0,0)$，且與直線 $y=8$ 交於 A、B 兩點，A 點在第一象限，B 點在第二象限。若 ΔOAB 的面積為 16 平方單位，試求：

(1)A、B 兩點之座標為何？

(2)此拋物線方程式為何？

習題 11：

洋洋公司舉辦員工旅遊，預定人數為 40 人，每人收費 5000 元。但達到 40 人之後，每超過 1 人，則每人費用減 100 元。例如若有 41 人，則每人收費 4900 元。請問人數為多少時，收到的總費用會最多？

習題 12：

如圖 9.1，爺爺想在河邊用鐵絲圍一個長方形的菜園，鐵絲長 160 公尺。河當作一邊不用鐵絲圍。請問圍成的菜園，最大面積為多少平方公尺？

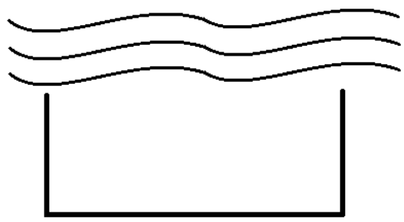


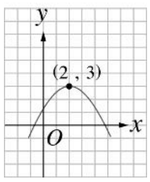
圖 9.1

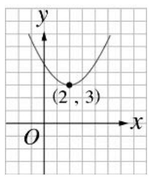
基測與會考模擬試題

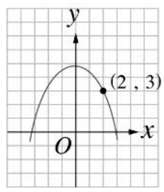
(　) 1.　若用配方法將二次函數 $y=-2x^2-4x+1$ 寫成 $y=-2(x-h)^2+k$ 的形式，求 $h+k=$？【91(一)基測】

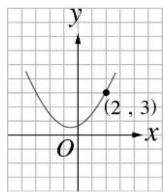
(A) 2　(B) 4　(C) -4　(D) -2

(　) 2.　下列為四個二次函數的圖形，哪一個函數在 $x=2$ 時有最大值 3？【92(一)基測】

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(　) 3.　下列哪一個二次函數，其圖形的對稱軸為 $x=2$？【93(一)基測】

(A) $y=(x+2)^2+4$　(B) $y=-(x-2)^2+1$　(C) $y=x^2-2$

(D) $y=x^2-2x+2$

(　) 4.　如圖 9.2，座標平面上有一透明片，透明片上有一拋物線及一點 P，且拋物線為二次函數 $y=x^2$ 的圖形，P 的座標為 $(2,4)$。若將此透明片向右、向上移動後，得拋物線的頂點座標為 $(7,2)$，則此時 P 的座標為何？【97(一)基測】

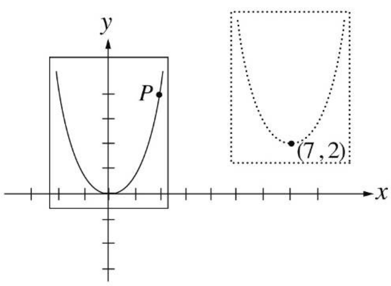


圖 9.2

(A) $(9,4)$　(B) $(9,6)$　(C) $(10,4)$　(D) $(10,6)$

(　) 5.　座標平面上有一函數 $y=24x^2-48$ 的圖形，其頂點座標為何？【99(一)基測】

(A) $(0,-2)$　(B) $(1,-24)$　(C) $(0,-48)$　(D) $(2,48)$

(　) 6.　下列哪一個二次函數，其圖形與 x 軸有兩個交點？【99(二)基測】

(A) $y=-x^2+2x-5$　(B) $y=-2x^2-8x-11$　(C) $y=3x^2-6x+1$

(D) $y=4x^2+24$

(　) 7.　座標平面上，二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形過 A、B 兩點，其中 A、B 兩點的 x 座標分別為 2、4。若自 A 作 y 軸的平行線，自 B 作 x 軸的平行線，且兩線交於 C 點，則 C 點座標為何？【99(二)基測】

(A) $(2,8)$　(B) $(2,2\sqrt{2})$　(C) $(4,2)$　(D) $(4,2\sqrt{2})$

(　) 8.　圖 9.3 為座標平面上二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，且此圖形通過 $(-1,1)$、$(2,-1)$ 兩點。下列關於此二次函數的敘述，何者正確？【100(一)基測】

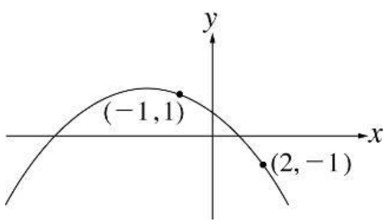


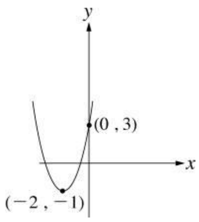
圖 9.3

(A) y 的最大值小於 0　　(B) 當 $x=0$ 時，y 的值大於 1

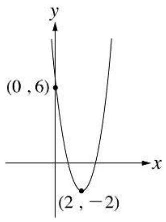
(C) 當 $x=1$ 時，y 的值大於 1　　(D) 當 $x=3$ 時，y 的值小於 0

(　)9.　若下列有一圖形為二次函數 $y=2x^2-8x+6$ 的圖形，則此圖為何？【100 北北基】

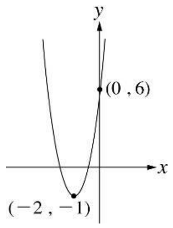
(A)



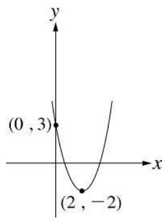
(B)



(C)



(D)



(　)10.　如圖 9.4，將二次函數 $y=31x^2-999x+89^2$ 的圖形畫在座標平面上，判斷方程式 $31x^2-999x+89^2=0$ 的兩根，下列敘述何者正確？【100 北北基】

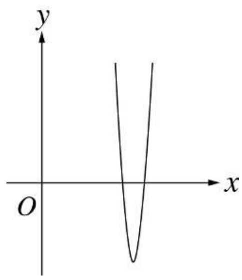


圖 9.4

(A) 兩根相異，且均為正根　　(B) 兩根相異，且只有一個正根

(C) 兩根相同，且為正根　　(D) 兩根相同，且為負根

(　)11.　座標平面上有一函數 $y=-3x^2+12x-7$ 的圖形，其頂點座標為何？【102 基測】

(A) $(2,5)$　(B) $(2,-19)$　(C) $(-2,5)$　(D) $(-2,-43)$

(　)12.　將兩個二次函數 $y=2x^2+1$ 與 $y=2x^2-1$ 畫在同一座標平面上，下列有關這兩個函數圖形關係的敘述，哪一個是錯誤的？【90(一)基測】

(A)有相同的開口方向　　(B)圖形都是拋物線

(C)有相同的頂點座標　　(D)有相同的對稱軸

(　) 13.　如圖 9.5，將二次函數 $y=x^2$ 的圖形向右移動兩個單位長，則下列哪一個二次函數的圖形，可為虛線所表示的圖形？【90(一)基測】

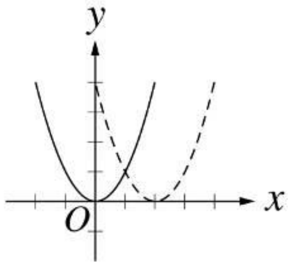


圖 9.5

(A) $y=x^2+2$　(B) $y=x^2-2$　(C) $y=(x+2)^2$　(D) $y=(x-2)^2$

(　) 14.　如圖 9.6，A、B 分別為 $y=x^2$ 上兩點，且 $\overline{AB}\perp y$ 軸。若 $\overline{AB}=6$，則直線 AB 的方程式為何？【91(二)基測】

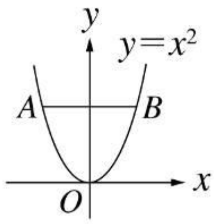


圖 9.6

(A) $y=3$　(B) $y=6$　(C) $y=9$　(D) $y=36$

(　) 15.　在座標平面上，有一個二次函數圖形交 x 軸於 $(-4,0)$，$(2,0)$ 兩點，今將此二次函數圖形向右移動 h 單位，再向下移動幾個單位後，發現新的二次函數圖形與 x 軸相交於 $(-1,0)$，$(3,0)$ 兩點，則 h 的值為何？【92(一)基測】

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4

(　)16.　在座標平面上，$y=2x^2-8$的圖形經由下列哪一種方式移動後，可得到 $y=2(x-5)^2+12$ 的圖形？【92(二)基測】

(A)先向左移 5 單位，再向上移 20 單位

(B)先向右移 5 單位，再向上移 20 單位

(C)先向下移 5 單位，再向右移 20 單位

(D)先向上移 5 單位，再向左移 20 單位

(　)17.　圖 9.6 是一座標平面。已知籃框位置 B 點在 y 軸上，今有一選手將球從 A 點的位置投出，球經過的路徑是拋物線，由 B 點空心進籃。若此拋物線是下列某一函數的圖形，則此函數為何？【92(二)基測】

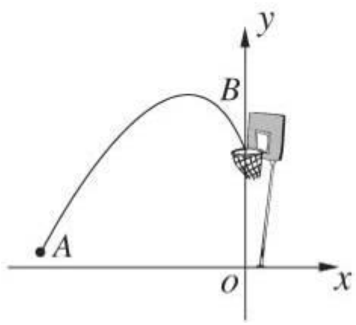


圖 9.6

(A) $y=6-\frac{1}{2}(x+2)^2$　(B) $y=6-\frac{1}{2}(x-2)^2$　(C) $y=6+\frac{1}{2}(x-2)^2$

(D) $y=6+\frac{1}{2}(x+2)^2$

(　)18.　有一算式“(50－□)×(□＋10)”，其中兩個□內規定皆填入相同的正整數。例如：當□填入“1”時，“(50－1)×(1＋10)＝539”，即此算式的值為 539。求此算式的最大值為何？【93(一)基測】

(A)700　(B)800　(C)900　(D)1000

(　)19.　下列哪一個二次函數，其圖形和 $y=4x^2-8x$ 的圖形有相同的頂點？【93(二)基測】

(A) $y=2x^2-4x$　　(B) $y=-2(x+1)^2$

(C) $y=2(x+1)^2+4$　　(D) $y=-2(x-1)^2-4$

(　)20.　小梅將一張畫有拋物線的透明片擺到座標平面上，將拋物線頂點與點(2 , 3)重合，開口向上時，此拋物線為二次函數 $y=2(x-2)^2+3$ 的圖形，如圖 9.7。若她將透明片反轉，使得開口向下且頂點的位置不變，如圖 9.8，則圖 9.8 的拋物線為下列哪一個二次函數的圖形？【97(二)基測】

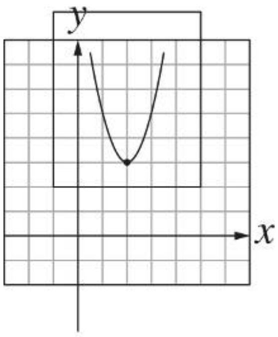


圖 9.7

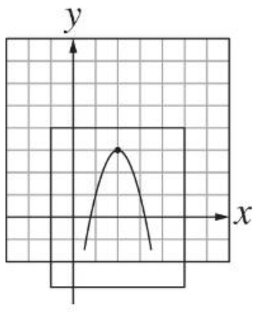


圖 9.8

(A) $y=-2(x-2)^2+3$　　(B) $y=-2(x-2)^2-3$

(C) $y=-2(x+2)^2+3$　　(D) $y=-2(x+2)^2-3$

(　)21.　向上發射一枚砲彈，經 x 秒後的高度為 y 公尺，且時間與高度的關係為 $y=ax^2+bx$。若此砲彈在第 7 秒與第 14 秒時的高度相等，則在下列哪一個時間的高度是最高的？【98(一)基測】

(A)第 8 秒　(B)第 10 秒　(C)第 12 秒　(D)第 15 秒

(　)22.　下列哪一個函數，其圖形與 x 軸有兩個交點？【98(一)基測】

(A) $y=17(x+83)^2+2274$　　(B) $y=17(x-83)^2+2274$

(C) $y=-17(x-83)^2-2274$　　(D) $y=-17(x+83)^2+2274$

(　)23.　座標平面上，二次函數 $y=x^2-6x+3$ 的圖形與下列哪一個方程式的圖形<u>沒有</u>交點？【100(一)基測】

(A) $x=50$　(B) $x=-50$　(C) $y=50$　(D) $y=-50$

(　)24.　如圖 9.9，座標平面上二次函數 $y=x^2+1$ 的圖形通過 A、B 兩點，且座標分別為 $(a,\frac{29}{4})$、$(b,\frac{29}{4})$，則 $\overline{AB}$ 的長度為何？【100(二)基測】

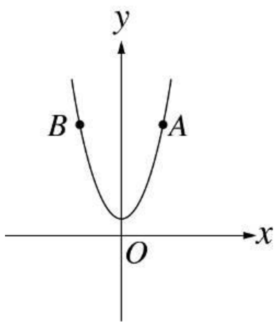


圖 9.9

(A) 5　(B) $\frac{25}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{29}}{2}$　(D) $\frac{29}{2}$

(　)25.　判斷下列哪一組的 a、b、c，可使二次函數 $y=ax^2+bx+c-5x^2-3x+7$ 在座標平面上的圖形有最低點？【101 基測】

(A) $a=0$，$b=4$，$c=8$　　(B) $a=2$，$b=4$，$c=-8$

(C) $a=4$，$b=-4$，$c=8$　　(D) $a=6$，$b=-4$，$c=-8$

(　)26.　有一個二次函數$y=x^2+ax+b$，其中a、b為整數。已知此函數在座標平面上的圖形與x軸交於兩點，且兩交點的距離為4。若此圖形的對稱軸為$x=-5$，則此圖形通過下列哪一點？【101基測】

(A)$(-6,-1)$　(B)$(-6,-2)$　(C)$(-6,-3)$　(D)$(-6,-4)$

(　)27.　有三個二次函數，甲：$y=x^2$，乙：$y=x^2+2x-1$，丙：$y=-x^2$，下列哪一個敘述是正確的？【90(二)基測】

(A)甲的圖形經適當的平行移動後，可與乙的圖形重疊在一起

(B)甲的圖形經適當的平行移動後，可與丙的圖形重疊在一起

(C)乙的圖形經適當的平行移動後，可與丙的圖形重疊在一起

(D)甲、乙、丙三個圖形經適當的平行移動後，都可重疊在一起

(　)28.　如圖9.10，<u>小智</u>丟垃圾的路徑是一個二次函數$y=-\frac{1}{3}x^2+2x+c$的圖形。已知<u>小智</u>是在此二次函數圖形的頂點(即B點)將垃圾丟出，且從$A(0,1)$點進入筒內。若B點的座標為(a,b)，則$b=$？【90(二)基測】

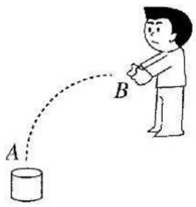
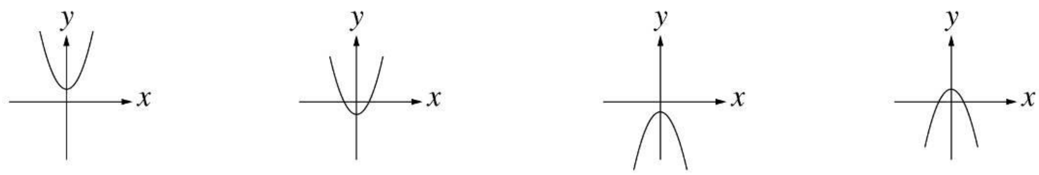


圖9.10

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

(　)29.　已知二次函數 $y=ax^2+k$，其中 $a<0$、$k>0$，則下列哪一個選項可能是此二次函數的圖形？【91(一)基測】

(A)　　(B)　　(C)　　(D)



(　)30.　如圖 9.11，在長度為 28 的 $\overline{AB}$ 上取一點 P。用 $\overline{AP}$ 圍成一個長方形 $PMNO$，其中 $\overline{PM}=3\overline{PO}$，再用 $\overline{BP}$ 圍成一個正方形 $PVUT$，如圖(二)。已知 $\overline{PO}=t$，長方形與正方形的面積和有最小值 s，則 $s=$？【91(二)基測】

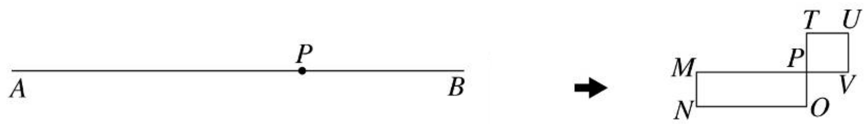


圖 9.11

(A)14　(B)21　(C)28　(D)29

(　)31.　在座標平面上，方程式 $y=2x^2-9$ 的圖形交 x 軸於 A、A' 兩點；方程式 $y=2(x-\frac{2}{13})^2-8$ 的圖形交 x 軸於 B、B' 兩點；方程式 $y=-2(x+\frac{3}{17})^2+5$ 的圖形交 x 軸於 C、C' 兩點。比較 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 的長度，下列關係何者正確？【98(二)基測】

(A) $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$　(B) $\overline{AA'}=\overline{BB'}>\overline{CC'}$　(C) $\overline{AA'}<\overline{BB'}<\overline{CC'}$

(D) $\overline{AA'}>\overline{BB'}>\overline{CC'}$

(　) 32.　座標平面上，若移動二次函數 $y=2(x-175)(x-176)+6$ 的圖形，使其與 x 軸交於兩點,且此兩點的距離為 1 單位,則移動方式可為下列哪一種?【99(一)基測】

(A)向上移動 3 單位　(B)向下移動 3 單位　(C)向上移動 6 單位

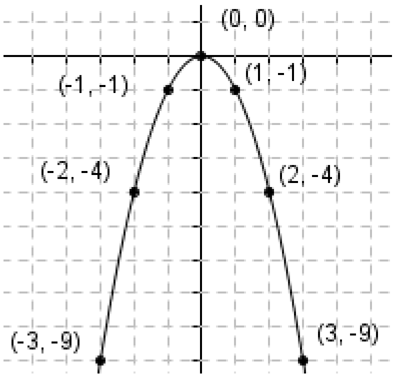
(D)向下移動 6 單位

習題解答

9.1 練習解答

練習 9.1-1

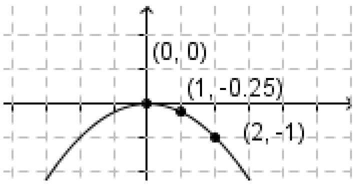
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



$f(x)=-x^2$

練習 9.1-2

x	0	1	2
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



$f(x)=-\frac{1}{4}x^2$

y 軸為對稱軸

練習 9.1-3

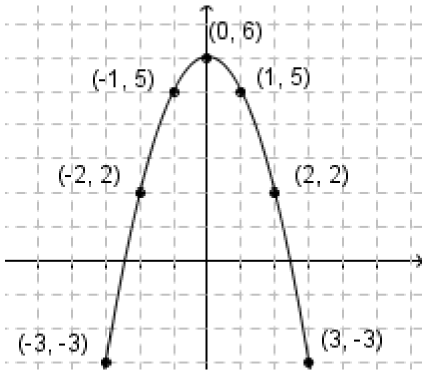
(1)開口向下　　(2)開口向上

(3)開口向下

練習 9.1-4

頂點 $(0,6)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	2	5	6	5	2	-3

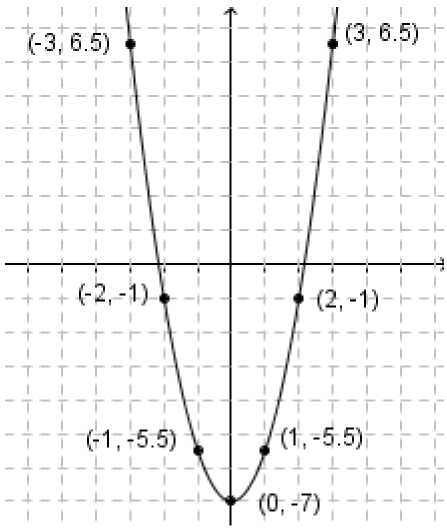


$f(x)=-x^2+6$

練習 9.1-5

頂點 $(0,-7)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6.5	-1	-5.5	-7	-5.5	-1	6.5

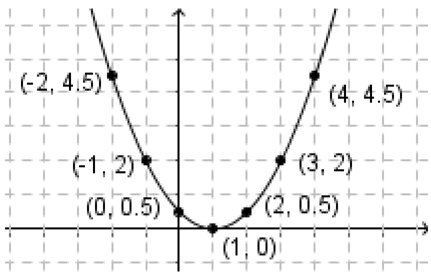


$f(x)=\frac{3}{2}x^2-7$

練習 9.1-6

頂點 $(1,0)$ 、對稱軸 $x=1$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

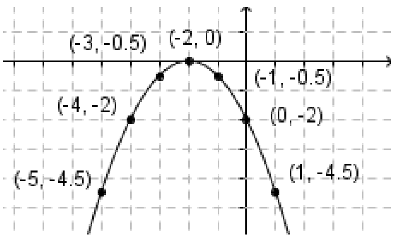


$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$

練習 9.1−7

頂點 $(-2,0)$、對稱軸 $x=-2$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5

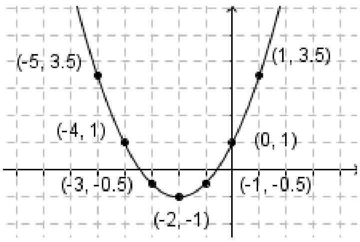


$$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2$$

練習 9.1−8

頂點 $(-2,-1)$、對稱軸 $x=-2$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	3.5	1	−0.5	−1	−0.5	1	3.5

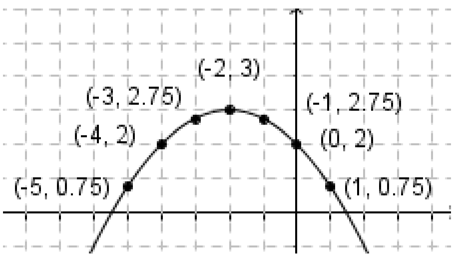


$$f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$$

練習 9.1−9

頂點 $(-2,3)$、對稱軸 $x=-2$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	0.75	2	2.75	3	2.75	2	0.75



$$f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2+3$$

練習 9.1−10

頂點 $(3,-13)$、對稱軸 $x=3$、開口向上

練習 9.1−11

頂點 $(-6,-4)$、對稱軸 $x=-6$、開口向下

練習 9.1−12

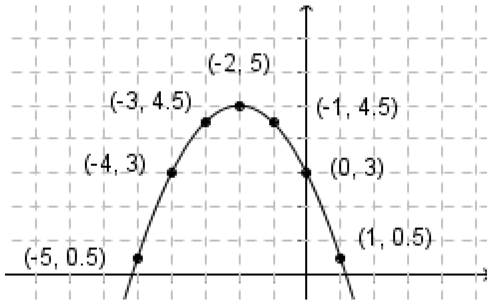
頂點 $(-2,-8)$、對稱軸 $x=-2$、開口向上

練習 9.1−13

頂點 $(1,-2)$、對稱軸 $x=1$、開口向下

練習 9.1−14

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	0.5	3	4.5	5	4.5	3	0.5



$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$$

練習 9.1−15

頂點 $(5,7)$

練習 9.1−16

$$f(x)=(x+1)^2+3$$

練習 9.1−17

$$f(x)=2(x+3)^2-2$$

練習 9.1−18

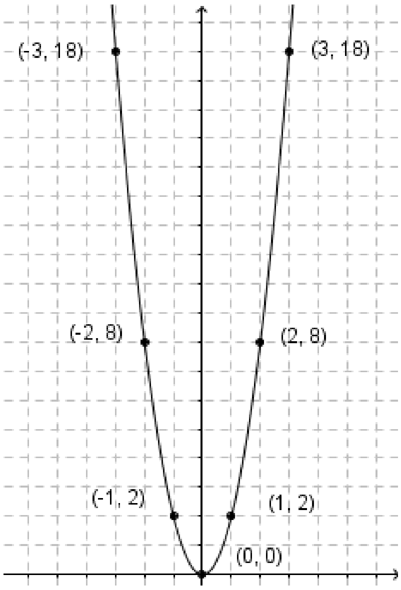
0 個

9.1 習題解答

9.1-1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

$f(x)=2x^2$



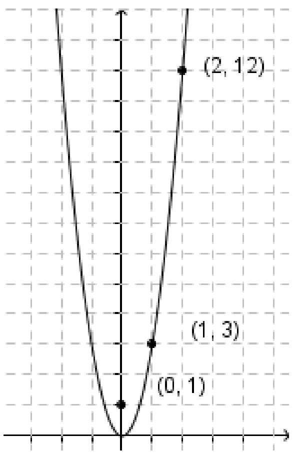
9.1-2

(1) y 軸為對稱軸

(2)

x	0	1	2
y	1	3	12

$f(x)=3x^2$



9.1-3

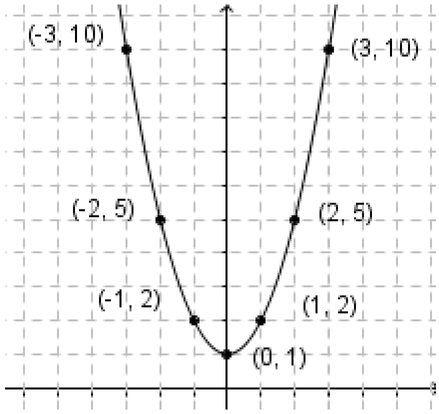
(1)開口向上　　(2)開口向下

(3)開口向上

9.1-4　頂點 $(0,1)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

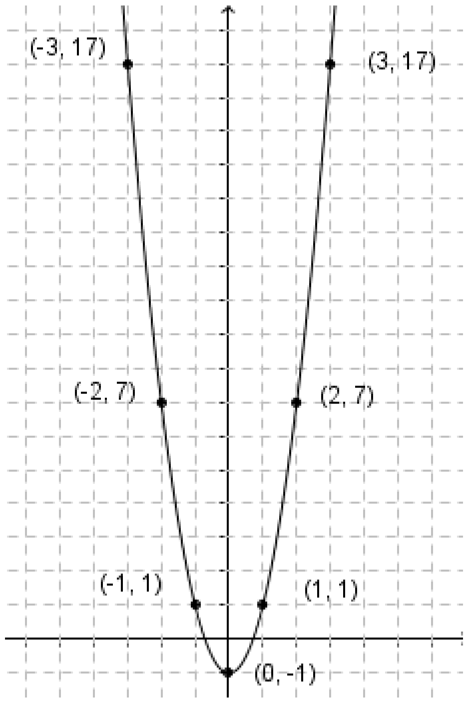
$f(x)=x^2+1$



9.1-5　頂點 $(0,-1)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	17	7	1	-1	1	7	17

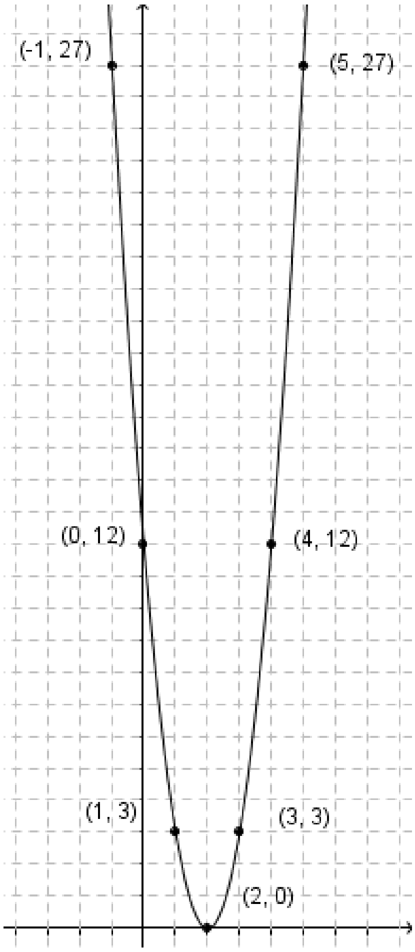
$f(x)=2x^2-1$



9.1−6　頂點 $(2,0)$、對稱軸 $x=2$

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	27	12	3	0	3	12	27

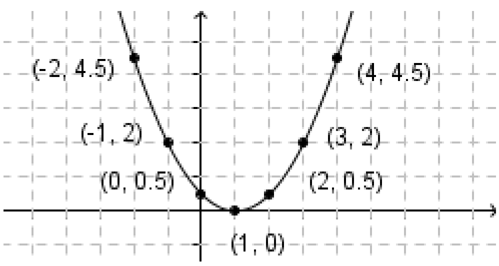
$f(x)=3(x-2)^2$



9.1−7　頂點 $(1,0)$、對稱軸 $x=1$

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

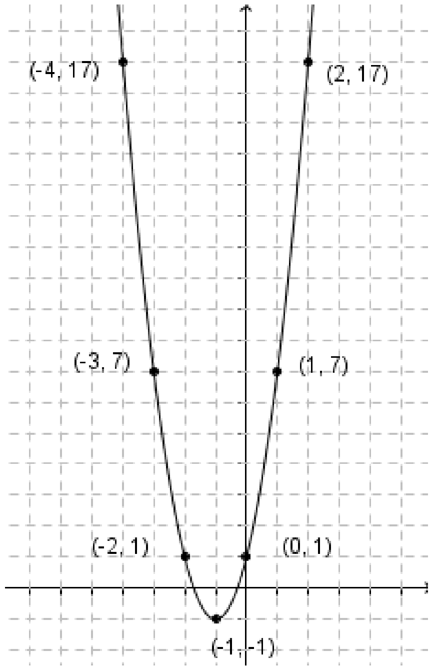
$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$



9.1−8　頂點 $(-1,-1)$、對稱軸 $x=-1$

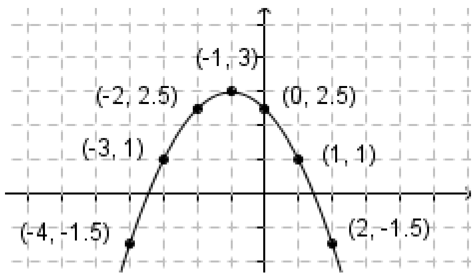
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	17	7	1	−1	1	7	17

$f(x)=2(x+1)^2-1$



9.1−9　頂點 $(-1,3)$、對稱軸 $x=-1$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	−1.5	1	2.5	3	2.5	1	−1.5



$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+3$

9.1−10　頂點 $(1,5)$、對稱軸 $x=1$、開口向上

9.1−11　頂點 $(-1,1)$、對稱軸 $x=-1$、開口向下

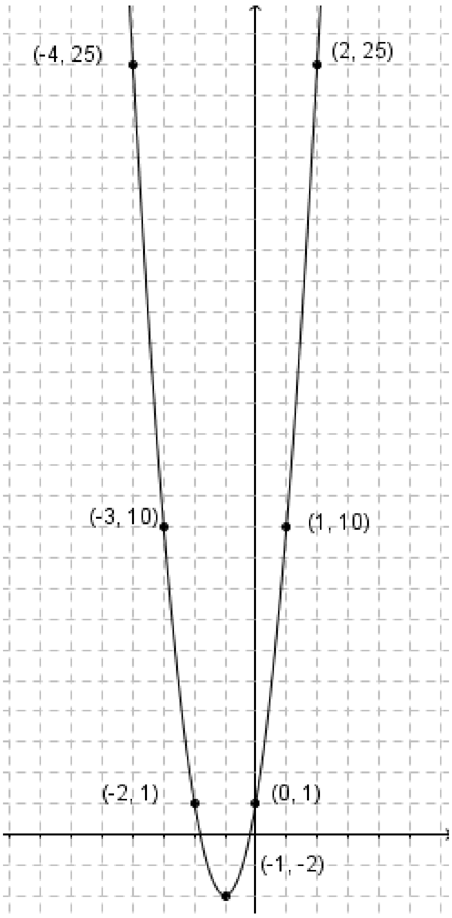
9.1−12　頂點 $(-1,-6)$、對稱軸 $x=-1$、開口向上

9.1−13　頂點 $(1,5)$、對稱軸 $x=1$、開口向下

9.1-14

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	25	10	1	-2	1	10	25

$f(x)=3x^2+6x+1$



9.1-15　頂點 $(-3,1)$

9.1-16　2 個

9.1-17　$f(x)=(x-1)^2+2$

9.1-18　$f(x)=-(x-2)^2+3$

9.2 練習解答

練習 9.2-1

(1) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$　(2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$

(3) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2$　(4) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-4)^2$

練習 9.2-2

(1) $f(x)=-5(x-5)^2+3$ (2) $f(x)=-5(x+4)^2-6$

練習 9.2-3

(1) $f(x)=(x+1)^2+1$　(2) $f(x)=(x+5)^2-2$

(3) $f(x)=x^2-4$

練習 9.2-4

$f(x)=(x-3)^2-15$

練習 9.2-5

$f(x)=-2(x+1)^2+8$

9.2 習題解答

9.2-1　(1) $f(x)=2x^2+2$　(2) $f(x)=2x^2-4$

(3) $f(x)=2(x+1)^2$ (4) $f(x)=2(x-3)^2$

9.2-2　(1) $f(x)=3(x-2)^2+4$

(2) $f(x)=3(x+3)^2-1$

9.2-3　(1) $f(x)=(x-3)^2+3$

(2) $f(x)=(x+2)^2-1$

(3) $f(x)=(x-1)^2-4$

9.2-4　$f(x)=(x-2)^2-2$

9.2-5　$f(x)=-(x-1)^2+2$

9.3 練習解答

練習 9.3-1

有最低點 $(-4,-2)$

練習 9.3-2

有最高點 $(3\frac{1}{2},3\frac{3}{4})$

練習 9.3-3

有最小值 -7

練習 9.3-4

有最大值 3

練習 9.3-5

有最大值 -16

練習 9.3-6

有最小值 -1

練習 9.3-7

有最小值 -1

練習 9.3-8

有最小值 -105

9.3 習題解答

9.3-1 有最低點 $(1,2)$

9.3-2 有最高點 $(3,-1)$

9.3-3 有最小值 5

9.3-4 有最大值 -2

9.3-5 有最小值 -4

9.3-6 有最大值 -2

9.3-7 有最小值 -4

9.3-8 有最小值 -2

9.4 練習解答

練習 9.4-1

4 單位

練習 9.4-2

$(2,-1)$ 、 $(6,7)$

練習 9.4-3

(1)長為 50 公分、寬為 50 公分

(2)2500 平方公分

練習 9.4-4

(1)8 公尺　　(2)30 公尺

練習 9.4-5

(1)19.6 公尺　　(2)4 秒

練習 9.4-6

(1) $A(6,9)$ 、 $B(-6,9)$　　(2) $y=\frac{1}{4}x^2$

練習 9.4-7

35 人時，收到 122500 元

練習 9.4-8

加種 5 棵時，產量 30250 根香蕉

練習 9.4-9

(1)36　　(2)72

練習 9.4-10

45

練習 9.4-11

(1) C 點座標 5，有最大值 16

(2) C 點座標 5，有最小值 32

練習 9.4-12

5000 平方公尺

9.4 習題解答

9.4-1　答：4 單位

9.4-2　答：$(-3,3)$、$(-4,8)$

9.4-3　答：(1)長為 10 公分、寬為 10 公分
(2)100 平方公分

9.4-4　答：(1)13 公分　(2)$4+2\sqrt{5}$ 公分

9.4-5　答：(1)225 公尺 (2)5 秒或 25 秒

9.4-6　答：(1) $A(6,12)$ 、$B(-6,12)$
(2) $y=\frac{1}{3}x^2$

9.4-7　答：15 人時，收到 22500 元

9.4-8　答：加種 5 棵時，產量 2250 個蘋果

9.4-9　答：(1)49　　(2)98

9.4-10　答：48

9.4-11　答：(1)C 點座標 6，有最大值 25
(2)C 點座標 6，有最小值 50

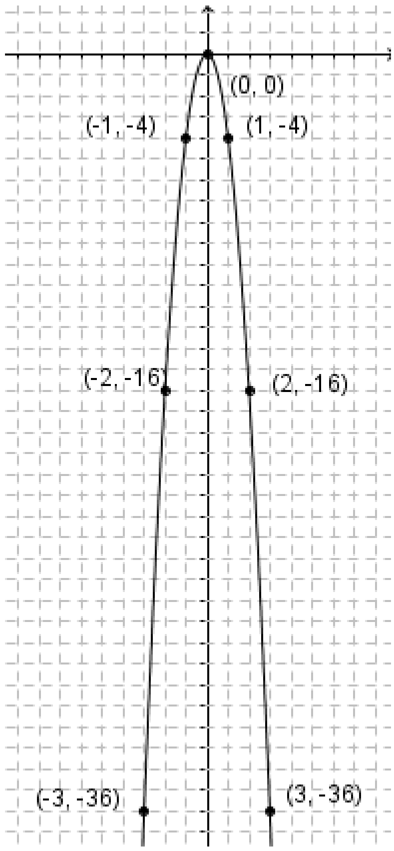
9.4-12　答：31250 平方公尺

第九章綜合習題

1. 答：

(1)

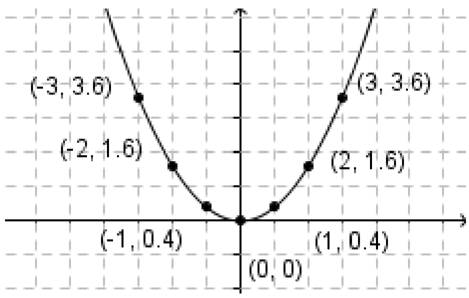
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-36	-16	-4	0	-4	-16	-36



$f(x)=-4x^2$

(2)

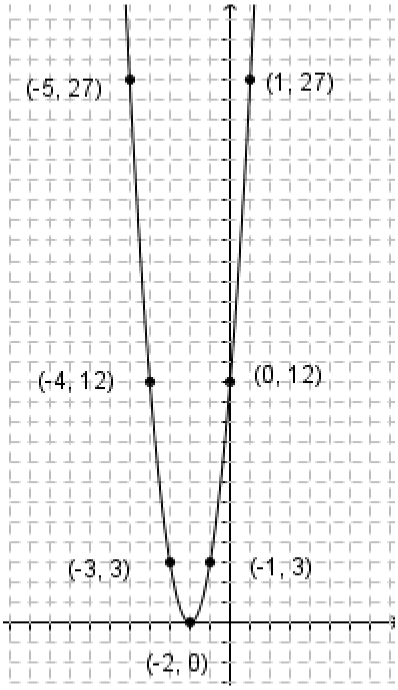
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3.6	1.6	0.4	0	0.4	1.6	3.6



$f(x)=\frac{2}{5}x^2$

(3)

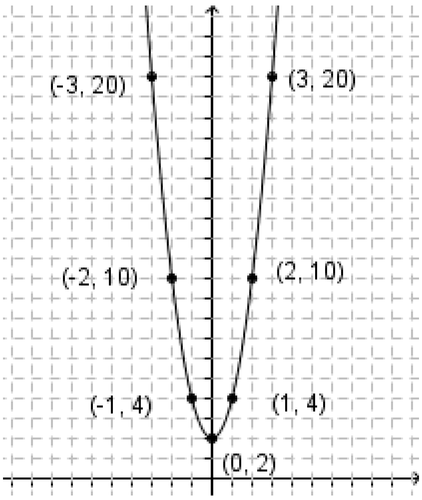
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	27	12	3	0	3	12	27



$f(x)=3(x+2)^2$

(4)

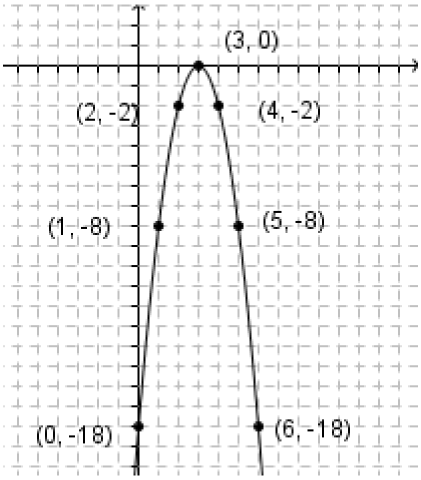
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	20	10	4	2	4	10	20



$f(x)=2x^2+2$

(5)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



$f(x)=-2x^2+12x-18$

2. 答：

(1) 開口向下、頂點 $(0,0)$ 、對稱軸 $x=0$

(2) 開口向上、頂點 $(0,0)$ 、對稱軸 $x=0$

(3) 開口向上、頂點 $(0,-2)$ 、對稱軸 $x=0$

(4) 開口向下、頂點 $(1,0)$ 、對稱軸 $x=1$

(5) 開口向上、頂點 $(1,1)$ 、對稱軸 $x=1$

(6) 開口向上、頂點 $(2,-5)$ 、對稱軸 $x=2$

(7) 開口向上、頂點 $(-1,-7)$ 、對稱軸 $x=-1$

(8) 開口向上、頂點 $(-4,-3)$ 、對稱軸 $x=-4$

3. 答：

(1) $x=0$ 時有最小值 6

(2) $x=0$ 時有最大值 -1

(3) $x=1$ 時有最小值 0

(4) $x=-3$ 時有最小值 -3

(5) $x=4$ 時有最大值 36

(6) $x=2$ 時有最小值 1

(7) $x=-4$ 時有最小值 -7

(8) $x=6$ 時有最小值 -25

4. 答：-3

5. 答：$\overline{AB}=15$

6. 答：$(2,-2)$ 、$(4,4)$

7. 答：(1)64　　　　　(2)128

8. 答：長為 100 公分、寬為 100 公分；
面積 10000 平方公分

9. 答：(1)16 公尺　　　　(2)2 秒或 6 秒

10. 答：(1) $A(2,8)$、$B(-2,8)$

(2) $y = 2x^2$

11. 答：45 人時，收到 202500 元

12. 答：3200 平方公尺

基測與會考模擬試題解答

1. 《答案》(A)

詳解： $y=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x+1)+2+1=-2(x+1)^2+3=-2(x-h)^2+k \rightarrow h=-1$、$k=3$
$\rightarrow h+k=-1+3=2$

2. 《答案》(A)

詳解： 二次函數在 $x=2$ 時有最大值 3，須為一開口向下，頂點為 $(2,3)$ 的拋物線，僅有(A)符合。

3. 《答案》(B)

詳解： (A) $y=(x+2)^2+4$ 對稱軸是 $x=-2$

(B) $y=-(x-2)^2+1$ 對稱軸是 $x=2$，符合

(C) $y=x^2-2$ 對稱軸是 $x=0$

(D) $y=x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$ 對稱軸是 $x=1$

4. 《答案》(B)

詳解： 頂點原為 $(0,0)$ 移動至 $(7,2)$，表示此透明片向右 7 單位、向上 2 單位移動；P 點座標 $(2,4)$ 向右 7 單位、向上 2 單位後新座標為 $(2+7,4+2)=(9,6)$

5. 《答案》(C)

詳解： $y=24x^2-48$ 的頂點為 $(0,-48)$

6. 《答案》(C)

詳解： 與 x 軸有兩個交點之二次函數判別式 $b^2-4ac>0$

(A) $2^2-4\times(-1)\times(-5)=-16<0$

(B) $(-8)^2-4\times(-2)\times(-11)=-24<0$

(C) $(-6)^2-4\times3\times1=24>0$，符合

(D) $0^2-4\times4\times24=-384<0$

7. 《答案》(A)

詳解： $y=\frac{1}{2}x^2$ 通過 A、B 兩點，其 x 座標分別是 2、4

A 點 x 座標是 2，代入 $y=\frac{1}{2}x^2$，得 $A(2,2)$；B 點 x 座標是 4，代入 $y=\frac{1}{2}x^2$，得 $B(4,8)$

自 A 作 y 軸的平行線，自 B 作 x 軸的平行線，相交於 $C(2,8)$

8. 《答案》(D)

詳解： 由圖知二次函數通過 $(-1,1)$、$(2,-1)$，判斷以下選項

(A) y 的最大值小於 0，是錯的

(B)當 $x=0$ 時，y 的值大於 1，是錯的

(C)當 $x=1$ 時，y 的值大於 1，是錯的

(D)當 $x=3$ 時，y 的值小於 0，是正確的

9. 《答案》(B)

詳解： $y=2x^2-8x+6=2(x^2-4x+4)-8+6=2(x-2)^2-2$，此二次函數的頂點為$(2,-2)$

當$x=0$代入$y=6$，故函數通過$(0,6)$，僅(B)符合

10. 《答案》(A)

詳解： 函數與x軸(即當$y=0$時)有兩交點，且都落於x軸的正向，故有兩相異正根

11. 《答案》(A)

詳解： $y=-3x^2+12x-7=-3(x^2-4x+4)+12-7=-3(x-2)^2+5$，此二次函數的頂點為$(2,5)$

12. 《答案》(C)

詳解： $y=2x^2+1$與$y=2x^2-1$皆為開口向上的拋物線，對稱軸皆為$x=0$，頂點分別為$(0,1)$、$(0,-1)$，故僅有(C)錯誤

13. 《答案》(D)

詳解： $y=x^2$向右移動 2 單位，可得新二次函數$y=(x-2)^2$

14. 《答案》(C)

詳解： A、B兩點在$y=x^2$上，且$\overline{AB}\perp y$，已知$\overline{AB}=6$，得知A、B兩點與y軸的距離都為 3，B點的x座標為 3，代入$y=x^2$得$y=9$，得知$B(3,9)$，直線AB的方程式為$y=9$

15. 《答案》(C)

詳解： 二次函數交x軸於$(-4,0)$、$(2,0)$，此兩點為對稱點，故對稱軸為$x=\dfrac{-4+2}{2}=-1$

右移h單位，再向下移動幾個單位後，新的函數交x軸於$(-1,0)$、$(3,0)$，故對稱軸為$x=\dfrac{-1+3}{2}=1$；對稱軸由$x=-1$移至$x=1$得知此函數向右移 2 單位

16. 《答案》(B)

詳解： 函數$y=2x^2-8$移動後得新函數$y=2(x-5)^2+12$，可知向右移 5 單位，向上移$12-(-8)=20$單位

17. 《答案》(A)

詳解： 此拋物線頂點落於第二象限，且開口向下；各選項頂點分別為(A)$(-2,6)$、(B)$(2,6)$、(C)$(2,6)$、(D)$(-2,6)$，僅有(A)、(D)符合，又只有(A)選項開口向下

18. 《答案》(C)

詳解： 設未知數x，$(50-x)(x+10)=-x^2+40x+500=-(x^2-40x+400)+900=-(x-20)^2+900$，當$x=20$時有最大值 900

19. 《答案》(D)

詳解： $y=4x^2-8x=4(x^2-2x+1)-4=4(x-1)^2-4$，頂點為$(1,-4)$

(A)$y=2x^2-4x=2(x^2-2x+1)-2=2(x-1)^2-2$，頂點為$(1,-2)$

(B) $y=-2(x+1)^2$，頂點為 $(-1,0)$

(C) $y=2(x+1)^2+4$，頂點為 $(-1,4)$

(D) $y=-2(x-1)^2-4$，頂點為 $(1,-4)$，符合

20. 《答案》(A)

詳解： 拋物線 $y=2(x-2)^2+3$ 反轉，開口方向改變，頂點、對稱軸皆不改變的二次函數，僅改變 x^2 項的係數正負，故 $y=-2(x-2)^2+3$

21. 《答案》(B)

詳解： 頂點 x 軸座標 $\frac{7+14}{2}=10.5$，拋物線開口向下，越接近頂點高度越高，故 10 秒時高度最高

22. 《答案》(D)

詳解： 由二次函數的開口與頂點判斷與 x 軸的交點數

(A)開口向上，頂點 $(-83,2274)$，與 x 軸沒有交點

(B)開口向上，頂點 $(83,2274)$，與 x 軸沒有交點

(C)開口向下，頂點 $(83,-2274)$，與 x 軸沒有交點

(D)開口向下，頂點 $(-83,2274)$，與 x 軸有 2 個交點

23. 《答案》(D)

詳解： $y=x^2-6x+3=(x^2-6x+9)-6=(x-3)^2-6$，拋物線開口向上，頂點 $(3,-6)$，不會通過 $y=-50$

24. 《答案》(A)

詳解： $y=x^2+1$ 通過 A、B 兩點，座標分別為 $(a,\frac{29}{4})$、$(b,\frac{29}{4})$，將此兩點代回 $y=x^2+1$

$\frac{29}{4}=a^2+1 \rightarrow a=\pm\frac{5}{2}$，$A$、$B$ 兩點的距離為 $\frac{5}{2}-(-\frac{5}{2})=5$

25. 《答案》(D)

詳解： $y=ax^2+bx+c-5x^2-3x+7=(a-5)x^2+(b-3)x+c+7$ 在座標平面上有最低點，則需 $a-5>0$，僅有(D)符合

26. 《答案》(C)

詳解： 二次函數與 x 軸交於兩點，且兩交點的距離為 4，又對稱軸為 $x=-5$，得知兩點為 $(-7,0)$、$(-3,0)$；將此兩點代回 $y=x^2+ax+b$

$\begin{cases}0=(-7)^2-7a+b\\0=(-3)^2-3a+b\end{cases} \rightarrow \begin{cases}7a-b=49\\3a-b=9\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a=10\\b=21\end{cases} \rightarrow y=x^2+10x+21 \rightarrow$ 將 $x=-6$ 代入

$(-6)^2+10\times(-6)+21=-3$，因此通過 $(-6,-3)$

27. 《答案》(A)

詳解： 甲：$y=x^2$、乙：$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$、丙：$y=-x^2$

甲、乙 x^2 項係數皆為 1，故平移後可重疊

28. 《答案》(B)

詳解：　$y=-\frac{1}{3}x^2+2x+c$ 通過 $(0,1)$，代入 $(0,1)$ 得 $c=1$

$y=-\frac{1}{3}x^2+2x+1=-\frac{1}{3}(x^2-6x+9)+4=-\frac{1}{3}(x-3)^2+4$，頂點為 $(3,4)$，$b=4$

29. 《答案》(D)

詳解：　$y=ax^2+k$，其中 $a<0$ 表示拋物線開口向下、$k>0$ 表示當 $x=0$ 時 $y>0$，僅有(D)符合

30. 《答案》(B)

詳解：　已知 $\overline{PO}=t$、$\overline{PM}=3\overline{PO}=3t$，$\overline{PT}=\frac{28-8t}{4}=7-2t$

$3t\times t+(7-2t)^2=3t^2+49-28t+4t^2=7t^2-28t+49=7(t^2-4t+4)+21=7(t-2)^2+21$

長方形與正方形的面積和最小值 $s=21$

31. 《答案》(D)

詳解：　三拋物線開口大小相同，因此若頂點與 x 軸的距離越大，則拋物線與 x 軸兩交點的距離越長

$y=2x^2-9$，頂點 $(0,-9)$，與 x 軸交 A、A' 兩點

$y=2(x-\frac{2}{13})^2-8$，頂點 $(\frac{2}{13},-8)$，與 x 軸交 B、B' 兩點

$y=-2(x+\frac{3}{17})^2+5$，頂點 $(-\frac{3}{17},5)$，與 x 軸交 C、C' 兩點

$9>8>5$，故 $\overline{AA'}>\overline{BB'}>\overline{CC'}$

32. 《答案》(D)

詳解：　$y-6=2(x-175)(x-176)$，當 $y=6$ 時 $x=175$ 或 $x=176$，此拋物線通過 $(175,6)$、$(176,6)$，兩點距 1 單位；向下移 6 單位後，兩點與 x 軸相交，且距離 1 單位